

TEORICA DELLE FUNZIONI

DI VARIABILI COMPLESSE

ESPOSTA DAL

DOTT. FELICE CASORATI

PROF DI CALCOLO DIFFERENZIALE E INTEGRALE NELLA R UNIVERSITÀ DI PAVIA

VOLUME PRIMO.



PAVIA

TIPOGRAFIA DEI FRATELLI FUSI

1868.

AL SUO CARO E ILLUSTRE MAESTRO

SENATORE FRANCESCO BRIOSCHI

CHE COLLA VOCE E COGLI SCRITTI

L'ISTRUZIONE DELLA GIOVENTÙ

INDEFESSAMENTE PROMOVE

E L'ONORE DELLE MATEMATICHE IN ITALIA

SALDAMENTE MANTIENE

QUESTO LAVORO DEDICA L'AUTORE

IN SEGNO DI ALTISSIMA STIMA

E DI PERPETUA GRATITUDINE

PREFAZIONE

Diffondere in Italia tra i giovani cultori delle matematiche i principi della variabilità complessa e la conseguente teorica generale delle funzioni, mostrar loro l' importantissima applicazione che se n' è fatta allo studio delle funzioni definite da equazioni algebriche ed algebrico-differenziali, e così metterli in grado di profittare agevolmente di tutti gli scritti originali comparsi e che vanno comparendo in questo ramo d' analisi, come fu il nostro intento nelle lezioni libere d' Analisi Superiore date in questa Università di Pavia negli anni scolastici 1866 e 1867, così è lo scopo della presente pubblicazione.

Per orientare sino da principio il lettore nel vasto campo, additandogli in pari tempo gli scritti ai quali ci riferiamo, abbiamo pensato di premettere alcune notizie storiche. Non ci siamo proposti il còmpito gravissimo, e non necessario, di una storia completa e circostanziata di tutti quanti i lavori che a questa materia hanno attenenza; ma soltanto una rapida indicazione di quelli nei quali si svolsero le precipue idee e furono conseguiti i risultamenti di più

generale importanza. Ci si vorrà dunque perdonare, se, in vista di ciò, e senza pregiudizio della stima dovuta a ciascuno scrittore, abbiamo taciuto di molti fra quei lavori che concernono esclusivamente uno od altro dei singoli argomenti o singole teorie che si legano alla variabilità complessa, comunque nella loro specialità importanti; se abbiamo taciuto di quei lavori i quali, trattando della variabilità complessa, deviano dal sistema di rappresentazione che con Gauss e Cauchy venne universalmente adottato; se abbiamo infine taciuto di tutti quelli che giudicammo potersi riferire piuttosto alla geometria che all' analisi, e la cui ommissione non ci parve impedire una chiara connessione delle idee destinate a entrare nel presente corso.

Saremo riusciti a scegliere e coordinare sempre opportunamente cose sparse in sì gran numero di scritti? Ce ne rimettiamo con reverente fiducia ai giudici competenti. Ben possiamo dire che la divisione in *Sezioni* e la successione di queste ci si offersero da sè per le più opportune; ma, quanto all' ordine, per dir così, interno di qualche *Sezione* e delle *Notizie*, e a certe particolari norme in esse seguite, non dobbiamo tacere la influenza che ebbero le interruzioni alle quali la redazione dell' opera andò soggetta per cause estranee alla scienza, e taluni riguardi speciali avuti nel concepire il piano di essa.

Avendo la redazione e la stampa durato più di quello che credevamo da principio, demmo luogo nel frattempo ad alcune giunte e modificazioni, le quali, se possono aver turbato in qualche parte quell' armo-

nia e spontaneità che sovente s' accompagna al primo disegno di un' opera, contribuiranno però in sostanza, lo speriamo, a rendere la presente sempre più idonea al suo scopo.

Gli speciali riguardi, dei quali abbiamo toccato qui sopra, si manifestano segnatamente nelle *Notizie*, per la esposizione alquanto particolareggiata di talune idee in confronto di altre, e nelle *Sezioni prima* e *terza*, per la trattazione incompleta ed inegualmente estesa degli argomenti. Il che, se può parere non del tutto opportuno per giovani allevati in altri istituti, riceve spiegazione dall' esserci noi regolati sull' indirizzo e sull' estensione delle cognizioni impartite d' ordinario nella nostra Università durante i primi due anni dello Studio matematico (1).

Se poi si noterà, avere noi dato alla seconda serie delle *Notizie* maggior ampiezza che non alla prima, ed essere entrati in più minuti particolari a riguardo di Cauchy e di Riemann che non di tutti gli altri analisti, vogliasi scorgerne la ragione in ciò che, informandosi l'opera nostra più specialmente alle idee ed ai metodi di questi due celebri matematici, ci è parso di dover mettere in maggior luce, per quali modi nei loro lavori la dottrina della variabilità complessa siasi svolta e costituita nella forma in cui la presentiamo.

Nelle *Notizie* profittammo di alcuni brani del rap-

(1) Abbiamo però ommesso, nel presente volume, le dimostrazioni di tre teoremi assai importanti che non entrano nel giro di queste cognizioni; essendoci contentati per il primo (Continuità delle funzioni algebriche, §. 43) di rimandare il lettore alla Memoria in cui originariamente venne dato, e riservandoci per gli altri due (Continuità, derivazione e integrazione delle serie, §. 49. Convergenza della serie $\mathfrak{S}$, §. 61) di ritornarvi più tardi.

porto sui recenti progressi dell' analisi letto dal R. L. Ellis nell' adunanza del 1846 della *British Association*, e dell' elogio di Jacobi letto da Dirichlet nel Luglio 1852 all' Accademia delle Scienze di Berlino (1), non che d' altri luoghi segnati dalle rispettive citazioni.

Alle difficoltà di esposizione, che avremmo incontrato in qualsiasi altra materia, qui si aggiunse quella non lieve di aver dovuto cercare ed eleggere i vocaboli necessari ad esprimere parecchie idee e parecchie sorte di considerazioni non ancora divulgate in Italia, dove non conosciamo altri scritti sull' argomento fuorchè alcuni del prof. Betti.

Per certo, nell' intraprendere questo lavoro, anzichè consultare severamente le forze del nostro ingegno e l' attitudine della nostra parola, abbiamo obbedito al desiderio di provvedere la gioventù italiana di un sussidio che le mancava per studi di somma importanza. Tuttavia, senza dissimularci le imperfezioni di esso, speriamo che non sia per fallire di molto al suo scopo; confortandoci nel pensiero che quei giovani, i quali riusciranno a superare le difficoltà e l' apparente aridezza che fossero per trovare in alcuni paragrafi delle prime *Sezioni*, sentiranno di poi crescere ognor più il loro interessamento per questi studi, e si terranno paghi della loro fatica;

(1) Pel rapporto citato (portante anche il titolo più particolare di *Theory of the Comparison of Transcendentals*) vedi il relativo volume fatto stampare, come di regola, dalla *Association*.

L' elogio di Jacobi, oltrechè nel tomo 52 del giornale di Crelle, può leggersi, tradotto in italiano, nel tomo 7 degli Annali di Scienze mat. e fisiche (Roma, 1856).

come noi in questo caso crederemo d'aver colto il più desiderabile frutto della nostra.

Prima di terminare questa prefazione ci sia permessa una breve parola su cose posteriori al 1865, col qual anno chiudemmo le nostre *Notizie*.

Riemann cessò di vivere il 20 Luglio 1866 (1).

(1) Attaccato da malattia polmonare, Riemann, sul cadere del 1862, si condusse, per consiglio dei medici, in Italia. Passato l'inverno a Messina, si restituì in Germania; ma rifece presto il cammino d'Italia, fermandosi in Pisa dal Novembre 1863 sino alla primavera del 1865. Da Pisa passò a Livorno, a Genova, a Nizza e finalmente a Selasca, paesello vicinissimo a Intra sul lago Maggiore, dove stette l'inverno 1865-66. Ritornato nella primavera 1866 in Germania, si ricondusse ben tosto a Selasca, dove terminò i suoi giorni. Una lapide fu quivi posta per indicare il suo sepolcro con le parole « Hier ruhet in Gott Georg Friedrich Bernhard Riemann, Professor zu Göttingen, geboren in Breselenz den 17 Sept. 1826, gestorben in Selasca den 20 Juli 1866. Denen die Gott lieben, müssen alle Dinge zum Besten dienen ».

Ecco la nota degli scritti da lui consegnati alla stampa.

1. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. Dissertazione inaugurale stampata in Gottinga nel 1851, e ristampata di fresco, essendone da tempo esaurita la prima edizione.

Negli Annali di Fisica e Chimica di Poggendorf.

2. *Zur Theorie der Nobili'schen Farbenringe* (Tomo 95).

Nel Giornale di Crelle-Borchardt

3. *Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlichen Grössen* (Tomo 54).

4. *Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen* (Tomo 54).

5. *Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen* (Tomo 54).

6. *Theorie der Abel'schen Functionen* (Tomo 54). Di questa famosa Memoria si può avere copia separata, che contiene anche i tre articoli precedenti, col titolo della Memoria stessa (Berlino, 1857).

7. *Ueber das Verschwinden der ϑ-Functionen* (Tomo 65).

Fra le memorie della R. Società delle Scienze di Gottinga.

8. *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ *dar-*

Questa fine immatura e altamente lamentevole non scema punto il grandissimo valore dei risultamenti da lui ottenuti; ma può tuttavia esercitare non poca influenza sul grado di diffusione che saranno per conseguire i suoi metodi di ricerca, i quali, adoperati da un così potente ingegno, avrebbero continuato a dare

stellbaren Functionen (Tomo 7). Di questa Memoria, che venne in luce nello stesso anno della *Theorie d. A. Funct.*, e pur' essa concorse a fare splendida prova della fecondità del metodo riemanniano, vorremmo veder presto una ristampa, essendone esaurite le copie a parte.

9. *Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite* (Tomo 8).

10. *Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines gleichartigen flüssigen Ellipsoids* (Tomo 9).

Nei Monatsberichten dell' Accademia delle Scienze di Berlino.

11. *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (Novembre 1859).

Nel tomo 7 degli Annali di Matematica (Roma, 1866) si legge un estratto di una lettera scritta da Riemann in lingua italiana, nel Gennajo 1864, al sig. Betti, sull' attrazione di un cilindro ecc.

Finalmente si troveranno nel tomo 13 delle Memorie della R. Società delle Scienze di Gottinga due lavori inediti, comunicati dal sig. Dedekind, che Riemann stendeva per conseguire nel 1854, presso l'Università di Gottinga, il diritto d'insegnare, i quali versano rispettivamente *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* e *Ueber die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*; e, oltre di questi, un recente lavoro *Ueber die Fläche vom kleinsten Inhalt bei gegebener Begrenzung*, redatto per incarico di Riemann stesso dal sig. Hattendorff. Con siffatta nuova applicazione del proprio metodo Riemann torna a incontrarsi in uno stesso campo scientifico coll' illustre fondatore della teorica delle funzioni iperellittiche, le ricerche del quale (*Ueber die Flächen, in denen die mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, ossia *Minimal-Flächen*) si possono vedere nei Monatsberichten dell'Accad. di Berlino del 1866.

Per ulteriori notizie sulla vita e sui lavori di Riemann vedasi il breve estratto (Nachrichten der K. Gesellschaft d. W. zu Göttingen. 1867. Juni 19) della commemorazione preparata dal sig. Schering per essere inserta fra le Memorie dello stesso Corpo scientifico; alla quale però il detto matematico farà precedere, giusta lo svolgimento storico della scienza, la commemorazione di Gauss.

ognora nuovi ed importantissimi risultati, e ottenuto di tal maniera senz'altro viepiù numerose ed autorevoli adesioni. Però, checchè avvenga, pur non essendo i soli coi quali sia possibile il progresso in questa disciplina, siffatti metodi non cesseranno di essere sommamente opportuni e tali da compensare largamente la fatica necessaria per prenderne intima cognizione.

Fra gli scritti, che con frequenza crescente si vanno succedendo in relazione colla nostra materia, il più notevole, in questi ultimi due anni (1866 e 1867), è la *Theorie der Abel'schen Functionen* dei sigg. Clebsch e Gordan. « Volgendo in mente il pensiero » dicono i due autori « di stabilire la teorica delle funzioni abeliane in una nuova maniera, ci è parso che fosse specialmente da riportarsi l' attenzione sulla primitiva sorgente della intera disciplina, cioè sul problema jacobiano d' inversione, sopra del quale il sig. Weierstrass ha sì felicemente fondata la teorica delle funzioni iperellittiche. E ci è parso conseguentemente possibile, pigliando le mosse dal medesimo, di pervenire direttamente ad una formola analoga alla jacobiana

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = e^{\int_0^u Z(u)\,du},$$

e perciò contenente, come nella teorica del sig. Weierstrass, la soluzione del problema d' inversione. Ed infatti bastarono alcune considerazioni geometriche ed alcuni teoremi della integrazione complessa, per poter battere compiutamente questa via diretta » (1). Insieme

(1) Pagg. v e vi della prefazione di essa opera. Altri passi della prefazione medesima ci diedero occasione di fare *Alcune riflessioni relative*

cogli scritti, che specialmente furono nostra guida, raccomandiamo con calore anche lo studio di quest'opera; persuasi che l'intimo legame per essa stabilito fra la moderna geometria e il ramo più importante delle moderne ricerche analitiche debba esercitare grande influsso sull'avvenire di quella e di questo.

Gli scritti di minor mole, in questi medesimi due anni, sono pure dovuti quasi tutti a matematici tedeschi, e rinvengonsi per la più parte nel giornale di Crelle-Borchardt, nei Monatsberichten dell'Accademia di Berlino, nella Zeitschrift für Mathematik und Physik e negli Annali di Matematica in Milano (1).

Infine vogliamo qui render grazie al dott. Carlo Formenti, uno tra quelli che seguirono col maggior interessamento le nostre lezioni, per le intelligenti e assidue cure da lui prestate nella correzione delle prove di stampa.

Pavia, Gennajo 1868.

alla teorica generale delle funzioni di variabili affatto libere, che leggonsi nel vol. 3 dei *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo (Dicembre 1866).

(1) Come autori di questi scritti possiamo indicare i sigg. Betti, Brill, Christoffel, Fuchs, Hankel, Heine, Königsberger, Kronecker, Neumann, Prym, Roch, Schläfli, Thomae, Weierstrass. — La Memoria del sig. Prym, a cui qui alludiamo, ha per titolo: *Zur Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche*, e fa parte del tomo 22 delle Mem. della Schweiz. Naturforsch. Gesellschaft. — Il sig. Hankel sta pubblicando un corso di *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, diviso in due parti. Ne comparve finora la prima parte, ove sono svolte con molta cura e compiutamente le proprietà fondamentali dei vari sistemi di numeri. — E qui citeremo eziandio la prima parte (*Algèbre des quantités complexes*, estratta dalle Mem. della Soc. di Scienze fis. e nat. di Bordeaux, 1. cahier 1867) di una *Théorie élémentaire des quantités complexes*, che sta pubblicando il sig. Hoüel.

INDICE

DEL VOLUME PRIMO

NOTIZIE STORICHE

SERIE PRIMA

SERIE SECONDA

SEZIONE PRIMA

OPERAZIONI ARITMETICHE E FORMOLE SEMPLICI CHE LORO CORRISPONDONO

CAPITOLO PRIMO

Operazioni aritmetiche. Estensione dell' idea di numero e quindi anche delle operazioni. Continuità.

CAPITOLO SECONDO

Rappresentazioni geometriche dei numeri e costruzioni corrispondenti alle operazioni aritmetiche.

CAPITOLO TERZO

Convenzioni per le formole e^z, lz.

SEZIONE SECONDA

CONCETTO DI FUNZIONE ED ALCUNE SUE DISTINZIONI CARDINALI

CAPITOLO PRIMO

Funzioni reali di una variabile reale.

CAPITOLO SECONDO

Funzioni reali di più variabili reali.

CAPITOLO TERZO

Funzioni complesse di variabili reali.

CAPITOLO QUARTO

Funzioni di una variabile complessa.

CAPITOLO QUINTO

Interpretazioni geometriche della condizione inchiusa nel concetto di funzione d'una variabile affatto libera. Investigazioni geometriche relative ad alcune funzioni particolari.

SEZIONE TERZA

RIVISTA DELLE ESPRESSIONI ANALITICHE

CAPITOLO PRIMO

Classificazione.

CAPITOLO SECONDO

Serie.

CAPITOLO TERZO

Prodotti infiniti.

CAPITOLO QUARTO

Integrali.

Pag.

SEZIONE QUARTA

ANALISI DEI MODI SECONDO I QUALI LE FUNZIONI POSSANO COMPORTARSI, NEL SUPPOSTO DELLA MONODROMIA, INTORNO AI SINGOLI VALORI DELLA VARIABILE

CAPITOLO PRIMO

Come una funzione si comporti intorno a un valor della variabile pel quale sia monodroma continua e finita.

CAPITOLO SECONDO

Come una funzione si comporti intorno a un valor della variabile pel quale sia monodroma continua e infinita.

CAPITOLO TERZO

Come una funzione si comporti intorno a un valore della variabile pel quale, isolatamente, sia discontinua.

CAPITOLO QUARTO

Esame dei modi secondo i quali una funzione possa comportarsi pel valore ∞ della variabile, supposto che intorno al medesimo debba essere monodroma e continua.

TEORICA DELLE FUNZIONI

DI VARIABILI COMPLESSE

NOTIZIE STORICHE

SERIE PRIMA

Sino dai primi passi nel calcolo integrale i matematici dovettero sospettare, che in un gran numero di casi gli integrali non si potessero esprimere con un numero finito di segni di operazioni o funzioni già in uso, e che quindi costituissero in certo modo nuove funzioni trascendenti. Le funzioni trascendenti già da tempo in uso riducevansi ai logaritmi ed alle funzioni esponenziali, agli archi circolari ed alle funzioni dette trigonometriche, ovvero, come noi sempre diremo, circolari. Mercè

l' intervento degli imaginari queste quattro specie di trascendenti potevano anche risguardarsi ridotte a due; risultando le funzioni circolari esprimibili, sotto forma finita, con funzioni esponenziali, e gli archi circolari con logaritmi.

Cominciando dagli integrali dei differenziali della natura più semplice, per indi procedere di mano in mano a quelli di natura viepiù complicata, si riuscì ad integrare i differenziali razionali, poscia gli irrazionali, la cui irrazionalità consistesse nel contenere la radice quadrata di una funzione intera di primo o secondo grado. Ma giunti a differenziali contenenti la radice quadrata di una funzione intera di terzo o quarto grado, l' integrazione in generale non si potè effettuare, e bisognò contentarsi di effettuarla in alcuni casi particolari. In casi particolari si potè effettuare l' integrazione anche di funzioni irrazionali e trascendenti, come ben si comprende, molto più complicate. Ma la dottrina della integrazione delle funzioni, e quindi anche della integrazione delle equazioni differenziali, venne a costituirsi in gran parte di un aggregato di metodi più o meno artificiosi, diretti a trasformare gli integrali proposti in altri che già si sapessero esprimere in termini finiti. Questi metodi, quasi tutti già conosciuti dai primi autori dell' analisi infinitesimale, oltrechè valevoli soltanto per talune classi di casi particolari, avevano anche il grave inconveniente, che, ove non riuscissero nella loro applicazione, poca o nessuna luce gettavano sulla natura dell' integrale, lasciando nell' incertezza, se fosse veramente impossibile la integrazione con quei segni di operazioni che volevansi impiegare, o se la non riuscita dipendesse soltanto dal non aver preso una via conveniente. Tale incertezza induceva a ripetere più e più volte in maniere differenti il tentativo della integrazione di una stessa formola differenziale.

La non riuscita degli incessanti e svariati tentativi, la estrema pochezza delle integrazioni effettuate, cioè delle trovate espressioni degli integrali per mezzo di un numero finito dei segni d' operazione o di funzione già in uso, dovevano in fine far comprendere che, per progredire convenevolmente nelle que-

stioni d' integrazione, bisognava imaginare metodi più acconci, meglio improntati di carattere scientifico.

L' onore di avere provocato il movimento riformatore della dottrina integrale è da tributarsi principalmente alle perseveranti fatiche di Legendre. Egli principia la introduzione al suo *Traité des fonctions elliptiques* con queste riflessioni: « Se si potessero disporre in un ordine metodico le diverse trascendenti, che finora non furono conosciute ed adoperate se non col nome di *quadrature*; se, studiando le loro proprietà, si trovassero i mezzi di ridurle alle espressioni più semplici, delle quali sono suscettibili nello stato di generalità, e di calcolarne facilmente i valori approssimati, allorchè divengano intieramente determinate; allora le trascendenti di cui si tratta, designate ciascuna con un segno particolare e sottomesse ad un' opportuno algoritmo, potrebbero adoperarsi nell' analisi press' a poco come gli archi circolari ed i logaritmi (1); le applicazioni del calcolo integrale non sarebbero più arrestate, come finora, da questa specie di barriera, che non si tenta più di sorpassare, allorchè il problema è ridotto alle quadrature; e le soluzioni, appena incominciate con questa riduzione, riceverebbero tutto lo sviluppo che comporta la natura della questione. »

Ciò che sarebbe stato impossibile di eseguire in un piano così vasto come quello ora delineato, Legendre lo realizzò per le trascendenti o quadrature che più si avvicinano alle trascendenti circolari e logaritmiche, e cioè per gli integrali di differenziali contenenti una radice quadrata di una funzione intera del terzo o quarto grado; integrali che furono chiamati ellittici, perchè con uno di essi può rappresentarsi la lunghezza di un arco d' ellisse. Ma è debito di menzionare alcune ricerche anteriori a Legendre.

(1) È notissimo che gli archi circolari ed i logaritmi possono definirsi come integrali di quantità algebriche in virtù delle formole

$$\text{arc sen } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \text{arc cos } x = \text{ecc. ecc.}, \quad lx = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

Maclaurin e d' Alembert si sono occupati degli integrali esprimibili per archi d' ellisse o d' iperbole; trovarono molte formole suscettibili di questa riduzione; ma, come Legendre fa osservare, i differenti risultati non erano legati tra loro e non potevano formare una teoria.

Il matematico italiano Fagnani aperse la via a specnlazioni più profonde. Sino dal 1714 propose il problema di determinare, per la parabola rappresentata dall' equazione $y = x^4$, un' arco tale che la sua differenza da altr' arco dato fosse rettificabile. Egli dimostrò, che si possono determinare in una infinità di maniere, sopra una qualunqne ellisse e sopra una qualunque iperbole data, due archi la cui differenza sia esprimibile algebricamente. Dimostrò pure, che la curva chiamata lemniscata gode di questa singolare proprietà, che i suoi archi possono essere moltiplicati o divisi algebricamente come gli archi circolari, sebbene ciascuno di essi sia una trascendente d' ordine superiore (1).

Eulero trovò e fece conoscere nel 1761 la vera sorgente di queste ed altre proprietà somiglianti in un teorema, il quale va tra i più bei trovati di questo grande pensatore. Il teorema consiste in ciò, che, posto

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} + \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}} = \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{\varphi(\xi)}},$$

dove φ è funzione intera del quarto grado, esiste fra x, y, a una relazione algebrica. Questa equazione algebrica può anche considerarsi come l' integrale generale della equazione differenziale

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = 0,$$

nel qual caso a esprimerebbe la costante arbitraria.

(1) Io una lettera unita alle opere di Fagnani si incolpa Maclaurin di aver preso dal matematico italiano una parte delle sue scoperte relative alla lemniscata ed alla curva elastica, senza debitamente dichiararlo.

Quando la funzione φ sia della forma

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi^2)(1 - k^2 \xi^2),$$

al qual caso suole ridursi qualunque altro, la relazione algebrica fra x, y, a può mettersi sotto la forma (1)

$$\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy\sqrt{1 - k^2 a^2} = \sqrt{1 - a^2}$$

Eulero dichiara di non aver ottenuto questo risultato con metodo regolare, ma « *potius tentando, vel divinando* » e raccomanda ai matematici la ricerca di un metodo diretto. Questa importante scoperta diede occasione ad Eulero di paragonare in modo più generale, che non si fosse fatto dapprima, non soltanto gli archi di una stessa ellisse, di una stessa iperbole o di una stessa lemniscata, ma in generale tutte le trascendenti comprese nella formola $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$, dove P significa una funzione razionale.

Nel 1768 compare il lavoro di Lagrange, che risponde all' esortazione euleriana. Lagrange ottiene l' integrale trovato da Eulero con un metodo la cui applicazione si eleva gradatamente dalle trascendenti inferiori alle trascendenti euleriane. Egli procede anche a considerare in generale l' equazione

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}},$$

(1) L' integrale considerato da Eulero è più generale di quello considerato da Fagnani. La proprietà stabilita nel suo teorema è analoga a quella di cui gode l' integrale circolare

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sen } x,$$

per il quale si sa, che l' equazione

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} + \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

ossia la

$$\text{arc sen } x + \text{arc sen } y = \text{arc sen } a$$

è soddisfatta dalla relazione algebrica

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = a.$$

e conchiude, che, se φ è funzione intera di grado superiore al quarto, l'equazione non può essere integrata, tranne in casi particolari. Eulero stesso avvertiva già, mediante un caso particolare, che il proprio risultato non sarebbesi potuto generalizzare nel senso che poteva parere più naturale. Era riservato ad Abel lo scoprire in qual senso la generalizzazione fosse possibile.

Nel 1775 e 1780 Landen, matematico inglese, fa conoscere che qualunque arco d'iperbole equivale alla differenza di due archi d'ellisse coll'aggiunta di una quantità algebrica; scoperta memorabile, come Legendre riflette, la quale semplifica la teorica di queste trascendenti, ed avrebbe potuto condurre l'autore ad altri risultati più importanti. Il teorema di Eulero stabilisce relazioni soltanto tra integrali simili, cioè fra integrali che, supposto φ della forma $(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)$, avrebbero uno stesso *modulo* k. La scoperta di Landen stabilisce una relazione fra integrali di modulo differente. Questa scoperta, mostrando che un integrale ellittico può essere *trasformato* in altro integrale della stessa specie con una sostituzione algebrica semplice, è il germe della teoria della *trasformazione*.

Nel 1784-1785 Lagrange segnalavasi di nuovo nello studio di queste trascendenti. Egli mostrava che la integrazione di qualunque funzione irrazionale, perchè contenente una radice quadrata di una funzione intera φ, può farsi dipendere dalla integrazione di una funzione della forma $\frac{P}{\sqrt{\varphi(x)}}$, P essendo razionale; e che, se il grado di φ non supera quattro, la integrazione può infine ridursi a quella di

$$\frac{N\,dx}{\sqrt{(1\pm p^2x^2)(1\pm q^2x^2)}}$$

essendo N razionale in x^2. Ridotto l'integrale ellittico a questa forma, Lagrange mostra, come, coll'introduzione di una nuova variabile, esso possa ridursi ad altro di forma simile, ma in cui p e q trovansi surrogate da due nuove quantità p' e q'; ciò che, sotto forma alquanto diversa, è ancora la trasformazione data da

Landen. Ora, se p è maggiore di q, p' riesce maggiore di p e q' minore di q; e quindi, ripetendo un opportuno numero n di volte la trasformazione, si può giungere ad un' integrale in cui $q^{(n)}$ sia tanto piccolo, che il fattore $1 \pm q^{(n)} x^2$ possa essere surrogato dall' unità, e però l' integrale da uno esprimibile per archi circolari o per logaritmi. Ovvero, colle successive trasformazioni nel senso opposto, si può giungere ad un' integrale in cui ${}^{(n)}p$ e ${}^{(n)}q$ riescano così poco differenti tra loro da poter surrogare al radicale uno dei fattori razionali di secondo grado, che lo compongono. In luogo poi di surrogare all' integrale, risultante da una delle trasformazioni, l' una o l' altra sorta di integrali più semplici ora indicati, si potrà spingere la calcolazione dell' integrale medesimo a quel grado di approssimazione che potrà desiderarsi, col mezzo di uno sviluppo in serie ordinata secondo le potenze ascendenti della quantità ($q^{(n)}$ nell' un supposto, ${}^{(n)}q - {}^{(n)}p$ nell'altro) che riesce piccola mercè le successive trasformazioni.

Queste erano le principali scoperte dei matematici nel campo, che stiamo contemplando, allorchè comparvero, fra le Memorie dell' Accademia di Parigi per il 1786, le prime ricerche di Legendre sull'integrazione per archi ellittici. Quest' illustre matematico non cessò mai d' allora in poi di ritornare ad intervalli sullo studio delle trascendenti ellittiche, che giustamente furono chiamate l' argomento suo prediletto. Dal 1786 fino al 1827, nel qual anno consegna al pubblico il suo *Traité des fonctions elliptiques*, egli fu pressochè solo ad occuparsene. Abbiamo detto essere a lui da tributarsi principalmente l' onore di avere aperta la nuova êra della dottrina integrale. Ed invero, è gran merito il suo di avere riconosciuto nel campo integrale il bisogno di lavori più sistematici, di avere ravvisato nelle menzionate scoperte i fondamenti di un'importante teorica, a costruire la quale dovesse consistere il primo dei lavori sistematici anzidetti, e di avere quest' opera appunto intrapresa e continuata con grande amore, e solo, per tutta quasi la sua vita. Non ci fermeremo ad accennare partitamen-

te quali risultati ei somministrasse nel 1786, poi nel saggio presentato all'Accademia nel 1792, negli *Exercices de Calcul Integral* e finalmente nel *Traité des fonctions elliptiques ;* ma cercheremo di dare succintamente l' idea complessiva della teorica che giunse a stabilire. Questa può riassumersi nei seguenti capi.

1. Completando ciò che Lagrange aveva principiato, egli riduce l' integrale generale

$$\int \frac{P\,d\,x}{\sqrt{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4}}$$

ai tre tipi o *forme canoniche* irriducibili tra loro

$$\int_0^x \frac{d\,x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

$$\int_0^x \frac{1-k^2 x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}\,d\,x$$

$$\int_0^x \frac{d\,x}{(1+n x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}}.$$

Chiama questi integrali *funzioni o trascendenti ellittiche di* 1ª, 2ª, 3ª specie, e, mediante la sostituzione

$$x = \operatorname{sen}\varphi,$$

li riduce e li suol considerare sotto la forma

$$\int_0^\varphi \frac{d\,\varphi}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}},$$

$$\int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}\,d\,\varphi,$$

$$\int_0^\varphi \frac{d\,\varphi}{(1+n \operatorname{sen}^2\varphi)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\varphi}}$$

Noi però, per ragioni che fra breve diremo, non adopreremo la parola *funzione*, ma ancora quella di *integrale*.

Egli indica colle lettere F, E, Π i tre integrali anzidetti e con Δ il radicale, laonde può scrivere

$$F = F(\varphi) = F(k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta}$$

$$E = E(\varphi) = E(k, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta\, d\varphi$$

$$\Pi = \Pi(n, k, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \operatorname{sen}^2 \varphi)\Delta}$$

Dà alla variabile φ il nome di *amplitudine*, alla costante k quello di *modulo* ed alla costante n quello di *parametro*. La riduzione alle tre forme fisse qui esposte è, come Legendre stesso fa osservare, cosa capitale per lo stabilimento della intiera teorica; da essa risulta il sistema di nomenclatura e di notazione, che deve servire per rappresentare questi integrali negli usi ordinarj dell' analisi e per investigarne con maggior agevolezza le proprietà.

In seguito distingue gli integrali di terza specie in integrali a *parametro circolare* ed in integrali a *parametro logaritmico*, distinzione a cui una memorabile scoperta di Jacobi accrebbe sommamente l' importanza, dal punto di vista della calcolazione o realizzazione numerica.

2. Confronta tra loro gli integrali di una stessa specie, differenti soltanto per l' amplitudine. Questa parte si divide in tre, relative ordinatamente a ciascuna delle tre specie; e ne è fondamento il teorema d' Eulero.

3. Trova relazioni fra integrali delle differenti specie, tra le quali essenzialmente da notarsi compajono: la relazione semplicissima fra gli integrali *completi* di prima e seconda specie, dipendenti da due moduli complementari; e quella di scambio fra parametro ed argomento nell' integrale di terza specie.

Completi si chiama gli integrali F, E, Π, quando l' amplitudine sia $\frac{\pi}{2}$; e *complementari* due moduli, quando la somma dei loro quadrati sia l' unità.

4. Sviluppa gli integrali in serie, che possano servire a calcolarne i valori.

5. Espone il metodo delle successive trasformazioni, la cui origine vedemmo doversi a Lagrange. Siccome la trasformazione ripetuta indefinitamente conduce, sì nell' uno che nell' altro senso, verso integrali di natura più semplice, cioè circolare o logaritmica; così si hanno due modi di approssimazione, uno per serie di integrali a moduli crescenti, l' altro per serie di integrali a moduli decrescenti. Per le tre specie di integrali ne provengono quindi in complesso sei processi d' approssimazione da considerare. Oltre questa *scala di moduli*, Legendre trova ed espone nel *Traité* una seconda specie di trasformazione e quindi una *seconda scala di moduli*, che, combinata colla prima, dà luogo alla formazione, com' egli dice, di una specie di scacchiere analitico, i cui quadretti corrispondono alle trasformazioni in numero infinito, che il più semplice degli integrali ellittici può subire, senza cessare di essere simile a sè stesso.

6. La riduzione ad integrali ellittici di quadrature non contenute nell' integrale generale su indicato.

7. La costruzione di tavole numeriche, affinchè l' uso degli integrali ellittici potesse introdursi nell' analisi come quello delle funzioni circolari e logaritmiche; affinchè cioè il loro valore si potesse prontamente calcolare in ogni caso particolare, e si potessero risguardare come effettivamente integrate, e occorrendo calcolabili senz' altro, tutte le espressioni che ai medesimi si trovassero ridotte. Egli fa osservare che non poteva essere questione di costruir tavole per gli integrali di terza specie; poichè, contenendo essi oltre la variabile principale, cioè l' amplitudine, due costanti arbitrarie, cioè il modulo ed

il parametro, si sarebbe dovuto costruire tavole a tripla entrata, cosa pressochè impossibile (1).

Come dicemmo, i matematici non presero parte ai lavori di Legendre intorno agli integrali ellittici. « Questa specie di abbandono, dice Legendre nel *Traité*, ha senza dubbio ritardato i progressi della Teorica degli integrali ellittici; ma l' Autore, con sforzi rinnovati a grandi intervalli di tempo, giunse infine a quasi affatto completarla. » Ma i primi due volumi del *Traité* erano appena comparsi in pubblico, che, di mezzo alla generale noncuranza, balzarono fuori le grandi scoperte di Abel e Jacobi. La prima Memoria di Abel sulle trascendenti ellittiche, contenuta nel secondo volume del giornale di Crelle, apparve nella primavera del 1827; e nell' estate di questo medesimo anno Jacobi pubblicava nelle *Astronomische Nachrichten* del sig. Schumacher il primo annunzio delle sue scoperte intorno alle medesime trascendenti.

Per queste pubblicazioni la teorica delle trascendenti ellittiche assumeva un'aspetto affatto nuovo, e lungi dall'apparire quasi compiuta, come già agli occhi di Legendre, essa presentavasi come appena incominciata e quindi esigente altri grandi studii, per essere condotta a compimento. L'assai provetto ed illustre matematico accolse con entusiasmo, degno d'ogni lode, le scoperte dei due novelli analisti.

Innanzi che diciamo dei lavori di questi, ci si permetta di ricordare la dichiarazione fatta nella prefazione, che, cioè,

(1) Propriamente l' opera, che suolsi complessivamente denotare col titolo di *Traité des fonctions elliptiques* contiene anche altre parti. Essa consta di tre volumi. Ciò che noi abbiamo sommariamente indicato è tutto compreso nei due primi volumi insieme con applicazioni alla geometria ed alla meccanica, col trattato degli integrali euleriani, e con qualche altra ricerca. Il primo volume veniva presentato dall' autore nel 1825 all' Accademia delle Scienze, ma non compariva in pubblico che nel 1827, insieme col secondo volume. Il terzo volume infine consta di tre supplementi destinati ad arricchire il *Traité* di una parte delle scoperte di Abel e Jacobi; supplementi che perciò comparvero gradatamente piu tardi, il terzo non essendo stato compito che nel Marzo 1832.

non entra nel piano di queste *Notizie* di menzionare tutti i risultati d' importanza nella teorica speciale delle trascendenti ellittiche o nelle singole altre teoriche, delle quali dovremo far cenno (1).

Comunque la trasformazione ed il progresso della teorica delle funzioni ellittiche dovuti ad Abel e Jacobi sieno risultati dall' azione simultanea di parecchi pensieri, che si ajutano reciprocamente, pure a due di questi sembra che debba attribuirsi la maggiore importanza, penetrando essi intimamente tutte le parti della nuova teorica, come poi anche le successive teoriche delle trascendenti superiori.

L' uno di questi pensieri è quello di considerare, come principale funzione da studiarsi, non già la dipendenza dell' integrale (ellittico di prima specie) dal suo limite, ma la dipendenza del limite dal valor dell' integrale. Crediamo utile di commentare questa *idea della inversione dell' integrale* riportando parte di quanto Jacobi, qualche anno dopo, esponeva nella Memoria *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.* (2)

« Eulero dimostrava che la trascendente $\Phi(x)$, definita da

(1) Per non mancare di troppo alle indicazioni desiderabili circa i lavori di Abel e Jacobi faremo notare ciò che segue.

La maggior parte dei lavori pubblicati da Abel lo furono nei primi quattro tomi del giornale di Crelle. Dopo la sua morte, tutto ciò ch' egli aveva già fatto pubblicare e ciò che rimaneva ancora inedito fra le carte da lui lasciate, venne raccolto per cura del sig. Holmboe, prof. all' Università di Christiania, e pubblicato nel 1839, a spese del Governo di Norvegia, col titolo *OEuvres complètes de N. H. Abel*. In questa raccolta manca soltanto la Memoria presentata all' Istituto di Francia, per ottenere allora copia della quale il sig. Holmboe dichiara che ogni sforzo riuscì infruttuoso.

Quasi tutti i lavori pubblicati da Jacobi lo furono per la prima volta nei primi 42 tomi del giornale di Crelle. Quanto alle funzioni ellittiche, bisogna eccettuare la famosa opera *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* pubblicata a Königsberg nel 1829. Quest' opera, com' è chiaro per la stessa sua data, non contiene che una parte delle ricerche di Jacobi sulle trascendenti ellittiche, e non è, come forse il titolo potrebbe lasciar credere, perfettamente adatta come primo oggetto di studio per chi trovasi affatto digiuno di ciò che sia teorica delle funzioni ellittiche anche nel senso attribuitole dapprima da Legendre. Sono poi tuttora in corso di ordinamento e pubblicazione, per volumi, molti e svariati lavori, ai quali la sorte non permise che Jacobi desse l' ultima mano.

(2) Crelle, tomo 9.

$$\Phi(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

dove φ è funzione intera del quarto grado, gode della singolare proprietà, che, posto

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(a),$$

si può determinare algebricamente a per mezzo di x ed y. Su questo teorema, e col sussidio della trasformazione della trascendente $\Phi(x)$ scoperta dal ch. Landen, Legendre costruì un' estesa teorica, presentemente chiamata *teorica delle funzioni ellittiche.* Tuttavia non è possibile di conoscere perfettamente la natura di queste trascendenti col considerare la sola funzione $\Phi(x)$ ovvero questa più generale

$$\int_0^x \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}},$$

dove $f(x)$ è funzione razionale di x, ma bisogna considerare la funzione, di cui la $\Phi(x)$ è la inversa, cioè *bisogna considerare l' intervallo o limite x come funzione dell' integrale $\Phi(x)$.* »

« Imperocchè, se, volendoci regolare per analogia, consideriamo le funzioni circolari, che sono comprese come casi particolari nelle ellittiche, vediamo, che anche per esse, posto

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}},$$

gli analisti considerano il limite x come funzione dell' integrale u, denominandola *seno.* La qual funzione sappiamo che gode di proprietà sommamente importanti, che ne rendono frequentissimi l' uso e l' applicazione in tutta l' analisi. Essa gode, tacendo di altre, delle seguenti proprietà: ha un solo e determinato valore per ogni valore della variabile od argomento u; può svilupparsi in serie ordinata secondo le potenze di u e convergente per qualunque valore reale od imaginario di quest' argomento; può decomporsi in fattori lineari, che vengono

determinati dai valori di u per i quali la funzione si annulla; insomma *gode di tutte le proprietà di una funzione razionale intera di u.* All'incontro u vien considerata dagli analisti soltanto come inversa della funzione $x = sen\ u$, dicendosi ch' essa è quell'arco il di cui *seno* è eguale a x, ovvero scrivendosi $u = arc\ sen\ x$; una siffatta funzione u di x non si può in nessun modo sviluppare in serie sempre convergente e non ammette un solo valore; ma ne ammette una infinità, essendo in sostanza come *radice dell' equazione algebrica di grado infinito* $x = sen\ u$ (1). Quindi non si stimò conveniente di stabilire a bella posta per essa un nome ed un segno particolare. »

« Lo stesso avviene della trascendente

$$\Phi(x) = u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} .$$

La funzione $\Phi(x)$ non può in nessun modo svilupparsi in serie sempre convergente, non ammette un solo valore, ma ne ammette un numero doppiamente infinito. Mentre, al contrario, la funzione x dell' integrale Φ, ossia di u, gode di tutte le proprietà *di una funzione razionale fratta;* potendosi considerare come una frazione, della quale tanto il numeratore quanto il denominatore sono funzioni razionali intere di grado infinito. Queste funzioni razionali intere di grado infinito si possono sviluppare in serie rapidissimamente convergenti per qualunque valore di u reale od imaginario; si possono decomporre in fattori lineari, che si determinano facilmente, per l'una mediante i valori di u per i quali x si annulla; per l' altra mediante i valori di u per i quali x diviene infinita. Finalmente la funzione x di u gode, tacendo di altre, della proprietà di avere due periodi, uno reale, l' altro imaginario, ove il modulo sia

(1) Ossia

$$x = \lim \left(u - \frac{u^3}{1, 2, 3} + \ldots\ldots \pm \frac{u^n}{1, 2, \ldots\ldots n} \right),$$

dove il segno *lim* esprime che il *grado* del polinomio fra parentesi deve crescere all' infinito.

reale; per il che riesce distinta sopra tutte le trascendenti finora conosciute. Come la funzione circolare $x = sen\, u$ possiede il periodo reale 2π, poichè $sen\,(u + 2\pi) = sen\, u$; come la funzione esponenziale e^u possiede il periodo imaginario $2\pi\sqrt{-1}$, poichè $e^{u+2\pi\sqrt{-1}} = e^u$: così, per osservazione fatta da noi e dal ch. Abel, la funzione ellittica x di u possiede i due periodi $4K$ e $2K'\sqrt{-1}$, vale a dire non muta di valore mutando u in $u + 4K$ ovvero in $u + 2K'\sqrt{-1}$, esprimendo K e K' gli integrali definiti

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\, sen^2\, \varphi}}, \quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{cos^2\, \varphi + k^2\, sen^2\, \varphi}}.$$

Per queste ragioni noi ed il ch. Abel giudicammo che l' arte analitica acquisterebbe grandi incrementi, introducendo questa nuova funzione $x = sen\, am\, u$, di cui la trascendente $u = \Phi\,(x)$ è inversa, cioè una delle radici dell' equazione algebrica $x = sen\, am\, u$, delle quali il numero è doppiamente infinito. »

Quind' innanzi la denominazione di *funzioni ellittiche* fu riservata per la funzione *sen am u* e per due altre, che, contemplate pure sì da Abel che da Jacobi, venivano da questo espresse con *cos am u* e $\Delta\, am\, u$, e sono così strettamente legate alla *sen am u* (1), e si presentano così inevitabilmente in questa teorica, come il coseno è legato e si presenta insieme col seno nella teorica delle funzioni circolari. Per aver dunque riguardo alle suesposte ragioni, uniformarci al presente uso generale, ed evitare nel tempo stesso ogni confusione, noi abbandonammo sin dal principio la denominazione di *funzioni*

(1) Le relazioni sono

$$cos\, am\, u = \sqrt{1 - sen^2\, am\, u}, \quad \Delta\, am\, u = \sqrt{1 - k^2\, sen^2\, am\, u},$$

dove i radicali riduconsi all' unità coll' annullarsi di *sen am u*.

ellittiche data agli *integrali ellittici* da Legendre; di cui potrà fare meraviglia, che mai non gli sia sorto il pensiero di considerare il limite come funzione dell' integrale.

Il secondo dei due pensieri principali, comune esso pure ad Abel e Jacobi, fu quello d' introdurre l' immaginario in questa teorica. E qui sarebbe da stupire che siffatta idea sia sfuggita ad Eulero, fra i primi e più bei trovati del quale si novera quello di aver condotta la teorica delle funzioni circolari, trattandole come grandezze esponenziali imaginarie, a tal grado di semplicità e d' estensione, che a quasi tutto il campo dell' analisi ne fu portata una essenziale trasformazione.

Egli è introducendo l' imaginario nelle nuove funzioni da essi contemplate, cioè nelle funzioni ellittiche, che Abel e Jacobi poterono riconoscere che le medesime partecipano della natura delle funzioni circolari insieme e delle esponenziali, vale a dire che sono doppiamente periodiche.

Abel e Jacobi rivolsero dapprima le loro ricerche verso due differenti regioni della teorica delle trascendenti ellittiche (1).

Abel mirò principalmente ai problemi della moltiplicazione e della divisione (2). Col principio del doppio periodo pene-

(1) Colla parola *trascendenti* intenderemo abbracciare tutt' assieme le funzioni inverse, (cioè i limiti considerati come funzioni degli integrali) e gli integrali considerati come funzioni dei limiti o di altre variabili, e specialmente delle variabili determinate da integrali di prima specie. Poichè si vedrà, tanto per le ellittiche quanto per le trascendenti superiori, ch' egli è considerando gli integrali di seconda e terza specie in opportuna dipendenza da quelli di prima specie cogli stessi limiti che si ottennero posteriormente i risultati i più rimarchevoli.

(2) D' ora innanzi designeremo le funzioni ellittiche colla notazione di Gudermann, più breve di quella di Jacobi, cioè con $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$.

Il problema della moltiplicazione consiste nel determinare $sn\,mu$, $cn\,mu$, $dn\,mu$, dove m significa un numero intero, mediante $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$. È assai facile, e si trovano per $sn\,mu$, $cn\,mu$, $dn\,mu$ espressioni razionali in $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$.

Il problema della divisione è l' inverso del precedente ossia è il problema di determinare $sn\,\frac{u}{m}$, $cn\,\frac{u}{m}$, $dn\,\frac{u}{m}$ mediante $sn\,u$, $cn\,u$, $dn\,u$. È molto più difficile, dipendendo dalla risoluzione di un' equazione del grado m^2.

Questi problemi possono riferirsi, secondochè piace, alle dette funzioni od all' integrale,

trando bene addentro nella natura delle radici dell' equazione, da cui la divisione dipende, giungeva alla scoperta affatto inaspettata, che la divisione generale dell' integrale ellittico, con limite arbitrario, può essere effettuata sempre algebricamente, cioè con semplici estrazioni di radici, ogni qualvolta si presupponga già eseguita la divisione particolare dell' integrale completo. Oltre i risultati concernenti la divisione, il primo lavoro di Abel contiene altre scoperte, che per l'analisi sono forse di ancor maggiore momento. Facendo crescere all' infinito il moltiplicatore nelle formole relative alla moltiplicazione, e cioè nelle formole per via delle quali egli aveva rappresentato le funzioni ellittiche di un argomento multiplo mediante le funzioni dell' argomento semplice, ottenne espressioni di sommo rilievo per le funzioni ellittiche: le une sotto forma di serie doppiamente infinite di frazioni razionali; le altre sotto forma di prodotti doppiamente infiniti di fattori razionali, ossia, come torna meglio considerarle, sotta forma di quozienti di prodotti doppiamente infiniti di fattori razionali interi.

d' oode esse provennero. Riferito all' integrale, il problema della divisione enuncierebbesi come segue: Determioare y per mezzo di x io modo ehe sia:

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-k^2y^2)}} = \frac{1}{m} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} .$$

Possiamo riflettere che il teorema d' Eulero esibiva precisamente la risoluzione dei due problemi d' addizione e sottrazione. Ponendo:

$$x = sn\, u , \quad y = sn\, v ,$$

la eguaglianza

$$\int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} + \int_0^y \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}} = \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(1-k^2\xi^2)}}$$

dà

$$a = sn\,(u+v) ,$$

e la relazione algebrica fornita dal teorema euleriano determina algebricamente

$$sn\,(u+v), \text{ come anche } cn\,(u+v) , \; dn\,(u+v) ,$$

mediante

$$sn\, u, \; sn\, v ; \; cn\, u , \; cn\, v ; \; dn\, u , \; dn\, v .$$

Jacobi invece esordì col problema della trasformazione. La trasformazione di Landen e Lagrange era la sola che Jacobi conoscesse, non essendosi ancora propagata in Germania la seconda trasformazione, trovata da Legendre. Una induzione felice, nella quale ebbe parte principale il sottile e affatto nuovo pensiero di considerare la trasformazione e la moltiplicazione da un comune punto di vista, e l'ultima come caso speciale della prima, condusse Jacobi a presentire, che funzioni razionali d'ogni grado fossero atte a trasformare un'integrale ellittico in un altro della stessa forma. E pertanto intraprese e riuscì a dimostrare, che ciò ha luogo in realtà, palesando l'intima natura analitica della espressione fratta appropriata alla trasformazione. Da un solo anello egli ha saputo dedurre l'esistenza e riconoscere la natura di una catena infinita.

Ma, come dicemmo, noi non dobbiamo enumerare tutte le ricerche ed i risultati conseguiti da Abel e Jacobi per fabbricare la teorica delle trascendenti ellittiche. E però, ommettendo ormai ogni altra speciale indicazione, ci restringeremo a toccare di quella trascendente, che fu il principale strumento di Jacobi nelle sue posteriori ricerche (che con lui (1) designeremo sino d'ora con ϑ), e che non solo prese a dominare tutta la teorica delle trascendenti ellittiche, ma che, opportunamento generalizzata, divenne l'elemento analitico principale delle teoriche, che andarono sorgendo per le trascendenti superiori. Jacobi concepì la idea d'introdurre nell'analisi, come trascendente che avesse una esistenza propria, uno, e quindi tutti (2) i prodotti infiniti, per i cui quozienti eransi trovate esprimibili le funzioni ellittiche. Abel otteneva, come già si è detto, questi prodotti considerando il caso limite ($m = \infty$) della

(1) Nei *Fund. Nov.* Jacobi adopera propriamente la majuscola Θ. Fors'anche non è affatto inutile l'avvertire che si adopera pure l'altra minuscola θ.

(2) Questi quattro prodotti sono tutti di una stessa natura analitica, sono esprimibili semplicissimamente l'uno per l'altro, e possono risguardarsi come casi particolari di *una sola* trascendente. Perciò, anche volendo alludere a tutti quattro, si potrà dire indifferentemente *la trascendente* o *le trascendenti* ϑ.

moltiplicazione, Jacobi li otteneva invece considerando il caso limite della trasformazione. I prodotti di Abel presentavansi come doppiamente infiniti, quelli di Jacobi come semplicemente infiniti. Quando Jacobi riuscì a porre sotto forma di serie siffatti prodotti, vi riconobbe una funzione presentatasi già ai matematici francesi nelle ricerche di fisica matematica. Però, mentre allora la detta funzione era stata poco considerata e solo una delle sue proprietà era stata avvertita, Jacobi la sottopose ad un profondo esame, ne riconobbe la natura analitica, e la introdusse nello studio degli integrali ellittici di seconda e terza specie. Ciò ebbe per effetto che queste due specie di integrali venissero ridotte a dipendere da quest' unica funzione ed in modo assai semplice; e che quindi, non solo venisse riconosciuto l' intimo legame di già note ma isolate proprietà degli integrali stessi, ma diventasse possibile una grande semplificazione di tutta quanta la teorica delle trascendenti ellittiche, la quale veniva a potersi fabbricare con un' unico elemento analitico, vale a dire con la sola ϑ. La riduzione dell' integrale di terza specie, che dipende da tre quantità letterali, alla funzione ϑ, che dipende soltanto da due, riusciva un fatto estremamente rimarchevole. Faremo riflettere, che, risultando reali queste due quantità per l' integrale a parametro logaritmico, diventa possibile di calcolare il valore di siffatto integrale con tavole a doppia entrata; il che non avvenendo per l' integrale a parametro circolare, cresce moltissimo la importanza, come dicemmo, dal punto di vista della realizzazione numerica, della distinzione fra queste due sorta di integrali.

Colla funzione ϑ Jacobi volle più tardi mutare l' intero ordine di trattazione della teorica, prendendo nel corso delle proprie lezioni la considerazione della ϑ come punto di partenza. Egli dovètte trovar conveniente di battere cotesta via, onde evitare quelle difficoltà che allora si presentavano nel fondare la teorica sulla considerazione degli integrali; difficoltà provenienti dalla infinità dei valori che gli integrali vengono ad ammettere colla introduzione degli imaginari. Ma queste difficoltà mercè i moderni

lavori sono dissipate. Quindi noi ci permettiamo di riflettere, che, sebbene questa seconda trattazione delle trascendenti ellittiche sia riuscita molto semplice e chiara, ed abbia con grande vantaggio della scienza servito di modello a ricerche posteriori (1), tuttavia non sembra quella che presentemente con-

(1) Le ricerche del prof. Rosenhain o di Göpel sulle funzioni abelione del primo ordine, che oceenneremo in seguito.

Per ciò che si riferisce al fondare, come dicevamo di Jacobi, la teorica delle funzioni ellittiche, non già sulla considerazione degli integrali, ma sulla considerazione dell' ente analitico (prodotto inf. o serie S) per cui mezzo le funzioni ellittiche riescono esprimibili, noi qui volentieri, o canto di Jacobi, citiamo Cauchy, Cayley, Eisenstein. Tutti e tre pensarono di prendere a fondamento di una trattazione delle funzioni ellittiche la considerazione dei prodotti infiniti. Cauchy, che si era occupato di quei prodotti semplicemente infiniti ai quali dava il nome di *factorielles réciproques* d' onde si hanno gli sviluppi di Jacobi, dedusse da questi le proprietà fondamentali delle funzioni ellittiche. Cayley ed Eisenstein le dedussero invece dai prodotti doppiamente infiniti, compiendo così rispetto agli sviluppi dovuti ad Abel ciò che Cauchy rispetto a quelli dovuti a Jacobi. Il sig. Cayley osserva, per quanto all'essere preferibile l' una piuttostochè l'altra maniera, *che le espressioni sotto forma di prodotti semplicemente infiniti delle funzioni jacobiane non mettono così bene in evidenza la vera natura di queste funzioni come le espressioni sotto forma di prodotti doppiamente infiniti ; queste ultime sono, inoltre, tanto analoghe alle formole in prodotti infiniti delle funzioni circolari, che è persino da meravigliare, che alcuno non abbia già prima pensato di porle a priori come le definizioni le più semplici delle funzioni doppiamente periodiche, per dedurne la teorica di queste funzioni.* Nei lavori del sig. Cayley e di Eisenstein additeremo specialmente siccome ricerche importantissime, alloro nuove, e nelle quali si trova assai maggiore interessamento che difficoltà, quelle che versano sulle alterazioni, che il valore di un prodotto o di una serie doppiamente infinita può subire, alterando l' ordine dei fattori o dei termini d' onde si compongono.

Il lavoro di Cauchy si trova nel volume 17 dei *Comptes Rendus* (2 Jan. 1843, pag. 825), e porta il titolo *Sur la réduction des rapports de factorielles réciproques aux fonctions elliptiques.*

Il lavoro del sig. Cayley, comparso dapprima nel quarto volume del *Cambridge Mathematical Journal* col titolo *On the Inverse Elliptic Functions*, comparve poscia, ampliato, nel tomo 10 (1845) del giornale del sig. Liouville col titolo *Mémoire sur les fonctions doublement périodiques.* Nel tomo 19 (1854) di questo stesso giornale il sig. Cayley pubblicava poi una seconda Memoria sull' argomento.

Il lavoro di Eisenstein fa parte dei suoi *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen*, ed è propriamente quella sezione dei *Beiträge* che porta il titolo di *Genaue Untersuchung der unendlichen Doppelproducte, aus welchen die elliptischen Functionen als Quotienten zusammengesetz sind, und der mit ihnen zusammenhangenden Doppelreihen;* la quale è contenuta nel tomo 35 del *Crelle* (1847). Si direbbe che Eisenstein siasi affrettato alle ricerche consegnate in questo stupendo lavoro per potersi al più presto possibile riabilitare dinanzi alle giuste e severe osservazioni emesse da Jacobi (*Crelle*, tomo 30, pag. 184) su ciò ch' egli aveva pubblicato nel tomo 27 dello stesso giornale.

venga di seguire, almeno in quanto s' intenda dare una teorica delle trascendenti determinate, direttamente od inversamente, dagli integrali ellittici. Sembra invece affatto conforme a tale intento il seguire l' ordine stesso col quale andò effettivamente sorgendo siffatta teorica; cominciare cioè cogli integrali, desumere da essi l' esistenza e i caratteri analitici delle funzioni *sn u, cn u, dn u,* e lasciare che la funzione di Jacobi si presenti naturalmente nelle successive investigazioni (1).

Riguardo alla trascendente in discorso, Dirichlet osservava, non potersi rifiutare alla medesima il primo posto dopo le trascendenti elementari, già da lungo tempo introdotte nella scienza, riflettendo a queste tre cose: ch' essa domina, come fu detto, tutta la teorica delle funzioni ellittiche; che dalle sue proprietà discendono, come Jacobi ha mostrato, importanti teoremi dell' aritmetica superiore; e infine, ch' essa stessa ha parte principale in molte applicazioni, fra le quali basterà ricordare la rappresentazione del moto di rotazione, data per suo mezzo, ch' è uno degli ultimi e più bei lavori di Jacobi. E pertanto, reputando singolare che una funzione di tanto momento non avesse ancora altro nome, se non quello di trascendente Θ, datole per caso dallo stesso Jacobi ne' suoi primi lavori, egli dichiarava, che i matematici avrebbero adempiuto un' obbligo

Finalmente ci permettiamo di chiamare in questa stessa occasione l' attenzione sopra la *Note sur la Theorie des fonctions elliptiques* aggiunta dal sig. Hermite alla sesta edizione del trattato elem. di calc. di Lacroix (1862), nella quale, senza molto ingombro di calcolo e con grande facilità ed eleganza, espone i principali risultati della teorica delle trascendenti ellittiche, cominciando dalla considerazione dei prodotti infiniti, e portaudosi successivamente a tutti i più rimarchevoli punti di vista d' onde le questioni furono trattate, e mostrando in molteplici maniere le attinenze di questa teorica colle più elementari già sviluppate e colle superiori che si vanno sviluppando (Nell' *Aperçu sur les fonct. de pl. variables* ecc. è tuttavia a desiderare qualche modificazione).

(1) Tale è l' ordine che trovasi, per esempio, preferito nelle pubblicazioni dei sigg. Weierstrass, Briot e Bouquet.

Gli integrali ellittici cesserebbero di essere il più naturale punto di partenza in quei lavori, nei quali non s' intendesse sin dal principio di prendere in considerazione le funzioni ellittiche; ma s' intendesse, per esempio, intraprendere una teorica delle funzioni doppiamente periodiche in generale. Noi avremo in seguito da indicare con sommo encomio i lavori che in questo senso fecero i sig. Liouville ed Hermite.

di riconoscenza accordandosi a mutare tal nome in quello dello insigne scopritore. Nelle più recenti pubblicazioni la trascendente Θ trovasi quindi frequentemente chiamata *funzione jacobiana.*

I lavori risguardanti la teorica delle funzioni ellittiche non sono gli unici nè i più rilevanti che Abel abbia regalato alla scienza. La di lui maggiore scoperta è contenuta in una proposizione che porta il suo nome ed è più d'ogni altra profondamente improntata del suo straordinario intelletto. Il teorema d'Eulero formava nella propria categoria il limite della scienza e, per varcarlo, invano si erano affaticati Eulero stesso, Lagrange ed altri predecessori di Abel. Or bene, Abel, con quella potente facoltà del suo spirito di mettere tra loro in comunicazione correnti diverse di idee, fece stupendamente fruttare le sue prime ricerche, che versarono sulle equazioni algebriche, nel nuovo argomento delle trascendenti originate dalla integrazione. Una applicazione di quelle sue prime ricerche fruttò le scoperte sulla divisione delle funzioni ellittiche; un' altra applicazione fruttò la generalizzazione del teorema d' Eulero, ossia quell' estesissimo teorema, di cui l' euleriano non è che un caso particolarissimo. Noi non staremo nemmeno ad enunciare questo generalissimo teorema, richiedendosi ben' altro che una semplice enunciazione per poterne afferrare anche solo incompletamente lo spirito e la portata. Ma, limitandoci a dire di esso, che abbraccia gli integrali di tutti i differenziali algebrici (1) e ne rivela la proprietà fondamentale, daremo invece più precisa idea (2) di quel suo caso particolare, che potrebbe dirsi una prima estensione del

(1) Integrali di differenziali algebrici diconsi tutti quelli che può somministrare la formola

$$\int f(x, y)\, d\, x\,,$$

dove f può essere qualsiasi funzione razionale di x, y, ed y qualsiasi funzione algebrica di x, vale a dire radice di qualsiasi equazione algebrica, i cui coefficienti sieno formati razionalmente con x.

(2) Il che stimiamo sufficiente per tener dietro a ciò che vogliamo additare in queste *Notizie.*

teorema d' Eulero; del qual caso avvenne, che esclusivamente avessero dapprima contezza gli analisti, e che perciò dal medesimo esclusivamente prendessero dapprima a dedurre quella serie di conseguenze, che nel nostro progredire riconosceremo.

Questo caso Abel lo diffondeva colla Memoria *Remarques sur quelques propriétés générales d' une certaine sorte de fonctions transcendantes*, che, non avvenendo tosto la pubblicazione della maggior Memoria (1), da lui presentata nel 1826 all' Istituto di Francia, egli inseriva nel tomo 3 (1828) del giornale di Crelle. Legendre, scrivendo ad Abel nel Gennajo 1829 (2), così si esprime riguardo al lavoro pubblicato « Ma la Memoria... intitolata *Remarques sur quelques propriétés ecc.* mi pare che sorpassi quanto finora pubblicaste per la profondità dell' analisi che vi regna, come per la bellezza e la generalità dei risultati». Questo è il teorema a cui fu dapprima applicata la denominazione di *teorema abeliano*, la quale vennegli esclusivamente conservata quasi anche un po' dopo essersi diffuso il teorema generalissimo. Siffatta denominazione veniva proposta da Jacobi, del quale riporteremo qui un brano, dove appunto dà l' idea del teorema; brano appartenente ad una Memoria, che già citammo (3), che avremo ancora da citare in seguito e che amiamo sin d' ora segnalare siccome quella che determinò la direzione delle ricerche più importanti che in seguito siensi pubblicate circa le trascendenti occasionate dalla integrazione.

« Il teorema d' Eulero... fu dal ch. Abel generalizzato in modo meraviglioso, e cioè esteso a comprendere qualsiasi grado per la funzione intera, che sotto il segno radicale ascendeva per gli integrali ellittici soltanto al quarto grado. Per cominciare dal caso più semplice dopo l' euleriano ovvero ellit-

(1) Quella cioè dove espone il teorema generalissimo insieme con preziose giunte, e che ha per titolo: *Sur une propriété générale d' une classe très-étendue de fonctions transcendantes.*

(2) Vedi il tomo 1 delle *OEuvres complètes* di Abel, pag. X.

(3) *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.* Giorn. di Crelle, tomo 9.

tico, sia $\varphi(x)$ una funzione intera del quinto o sesto grado e si ponga

$$\int_0^x \frac{(A + A_1 x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \Phi(x).$$

Abel dimostrò, che, proposta la equazione

$$\Phi(x_1) + \Phi(x_2) + \Phi(x_3) = \Phi(y_1) + \Phi(y_2),$$

le quantità y_1, y_2 si possono determinare *algebricamente* mediante le x_1, x_2, x_3. In generale poi, imaginando $\varphi(x)$ del grado $2m$ o $2m - 1$ e ponendo

$$\int_0^x \frac{(A + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_{m-2} x^{m-2})\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = \Phi(x),$$

fu dal ch. Abel dimostrato, che, dato un numero m di valori della variabile x

$$x, x_1, x_2, \dots\dots, x_{m-1},$$

si possono con essi determinare algebricamente $m - 1$ quantità

$$y, y_1, y_2, \dots\dots, y_{m-2},$$

tali che soddisfino all' equazione trascendente

$$\Phi(x) + \Phi(x_1) + \dots + \Phi(x_{m-1}) = \Phi(y) + \Phi(y_1) + \dots + \Phi(y_{m-2}).$$

E le anzidette quantità $y, y_1, \dots$ furono da lui trovate come radici di una equazione algebrica dell' $(m - 1)$ esimo grado, della quale ciascun coefficiente è razionalmente esprimibile mediante

$$x, x_1, \dots, x_{m-1};\ \sqrt{\varphi(x)}, \sqrt{\varphi(x_1)}, \dots, \sqrt{\varphi(x_{m-1})}.\ »$$

« Dal quale teorema discende anche facilmente, che, dato un numero qualsiasi di valori di x, la somma delle trascendenti $\Phi(x)$, che corrispondono a tutti questi valori, si può sempre esprimere mediante $m-1$ trascendenti $\Phi(x)$, che corrispondono ad $m - 1$ valori di x, determinabili algebricamente per mezzo di quelli dati ».

« Al teorema precedente, siccome bellissimo monumento

di mirabile ingegno rapito da morte immatura, vogliasi dare il nome di *teorema abeliano*. E le trascendenti $\Phi(x)$, quando il grado di $\varphi(x)$ sia maggiore di quattro, vogliansi chiamare *trascendenti abeliane* » (1).

La contemplata Memoria di Abel abbraccia del resto anche i casi in cui nella formola

$$\Phi(x) = \int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$$

la $f(x)$ non sia una funzione intera ed al più del grado $(m-2)$esimo, ma una qualunque funzione razionale; sì che, per esprimere la somma di un qualsivoglia numero di integrali Φ mediante un determinato numero di integrali della stessa natura, possa rendersi necessario di aggiungere alla somma di questi ultimi integrali una quantità algebrica e logaritmica, come già per gli integrali ellittici di seconda e terza specie (2).

(1) Propriamente Jacobi proponeva per la prima volta la denominazione di *teorema abeliano* nella *Notizia* che del terzo supplemento al *Traité* di Legendre dava nel tomo 8 del giornale di Crelle. Ivi dichiara (pag. 415) « che questo teorema, il quale esprime sotto forma semplice e senza apparato di calcolo il pensiero matematico più profondo e più vasto, egli lo riguarda come la maggior scoperta del nostro tempo, sebbene tutta la sua importanza non possa venir reso manifesta che da un nuovo e grande lavoro, *forse* ancora lontano ». Vedremo che questo nuovo e grande lavoro veniva bentosto principiato dallo stesso Jacobi colla Memoria or ora segnalata. Quanto alla denominazione di *abeliane* per le trascendenti qui considerate, facciamo notare: che Legendre nell' anzidetto Supplemento proponeva la denominazione di *ultra-ellittiche*, cui Jacobi opportunamente traduceva con *iperellittiche*; che diffusasi la conoscenza del più generale teorema abeliano, venne in uso di chiamare *abeliane* in generale tutte le trascendenti che scaturiscono dall' integrazione d' ogni sorta di differenziali algebrici; che, perciò, dai più (e noi ne seguiremo l' esempio) si preferisce ormai la denominazione di *iperellittici*, quando si allude agli integrali or ora considerati, mentre però veggonsi ancora quasi indistintamente usate le denominazioni di *iperellittiche* o di *abeliane* per le funzioni inverse dei medesimi.

(2) Ritornando al teorema più generale, faremo osservare che, tre anni dopo la presentazione della Memoria all' Istituto di Francia, Abel pubblicava anche questo teorema nel tomo 4 del giornale di Crelle mediante un brevissimo articolo intitolato *Démonstration d' une propriété générale d' une certaine classe de fonctions transcendantes*, il quale, portando la data del Gennajo 1829, è *forse* stato l' ultimo de' suoi scritti. Il teorema stesso comparve, dopo la di lui morte, con maggiori sviluppi nel secondo volume delle sue *Œuvres Complètes* col titolo *Sur la comparaison des fonctions transcendantes*; articolo scritto prima de' suoi viaggi e quindi prima della Memoria di Parigi.

Prima di abbandonare questo grande matematico, dobbiamo ancora mettere in rilievo quelle sue ricerche che hanno per iscopo la effettiva integrazione dei differenziali algebrici, e cioè le ricerche: se esistano e quali sieno le espressioni finite dei loro integrali, le espressioni, s'intende, che implicano un numero finito di operazioni o funzioni di data natura. Queste importantissime ricerche sono fors'anche precisamente quelle che lo condussero al teorema celeberrimo precedentemente segnalato.

Già dicemmo come non fosse stato possibile di molto progredire nella effettiva integrazione delle formole differenziali, e come difetto si fossero i metodi che solevansi seguire in simili ricerche. Abbiamo poi detto quali idee esponesse e cosa principiasse a fare Legendre. Tuttavia Legendre non proclamava decisamente come destituiti di carattere scientifico e da abbandonarsi onninamente nel calcolo integrale quei metodi, che nel particolare campo degli integrali ellittici egli insegnava a surrogare colle sue ricerche ben meglio regolate. Il proclamare affatto apertamente questa severa sentenza era riservato al giovane genio del Norvegio, che, additando i caratteri fondamentali di metodi migliori, ne dimostrava splendidamente la fecondità colle grandi sue scoperte in vari rami d' analisi.

Nel principio della Memoria, postuma ed incompiuta, *Sur la résolution algébrique des équations* (1), Abel fa le seguenti riflessioni:

« Uno dei problemi più interessanti dell' algebra è quello della risoluzione algebrica delle equazioni. Perciò se ne occuparono quasi tutti i più distinti geometri. Si giunse senza difficoltà all' espressione delle radici delle equazioni dei primi quattro gradi. Si scoperse un metodo uniforme per risolvere queste equazioni, cui ritenevasi di poter applicare ad un'equa-

(1) *OEuvres complètes,* tomo 2, pag. 185. Siamo persuasi che il brano, che riportiamo, non sembrerà troppo lungo a chi consideri quanto debba essere preziosa ogni riflessione di un tanto pensatore.

zione di un grado qualunque ; ma, malgrado tutti gli sforzi di Lagrange e di altri insigni geometri , non fu possibile di raggiungere la meta proposta. Ciò fece presumere, che la risoluzione delle equazioni generali fosse impossibile algebricamente ; ma non si poteva su tal punto portare deciso giudizio , *atteso che il metodo adottato non avrebbe potuto condurre a conclusioni sicure, se non quando le equazioni fossero state risolubili. Ed invero, proponevansi di risolvere le equazioni, senza sapere se ve ne fosse la possibilità.* In simil caso, si potrebbe ben giungere alla risoluzione, quantunque ciò non fosse niente affatto sicuro; *ma, se per disgrazia la risoluzione fosse impossibile, si potrebbe cercarla un' eternità, senza trovarla.* Per giungere *infallibilmente* a qualche cosa in questa materia , bisogna dunque prendere un' altra via. *Si ha da dare al problema tal forma che sia sempre possibile di risolverlo,* la qual cosa può sempre farsi rispetto a qualsiasi problema. *Invece di domandare una relazione, che non si sa se esista o non esista, bisogna domandare se una tale relazione sia possibile. Nel calcolo integrale , per esempio , invece di cercare , come a tentone e quasi divinando , di integrare le formole differenziali , bisogna piuttosto cercare , se sia possibile di integrarle in tale o tale maniera. Presentando un problema in questo modo, l' enunciato stesso contiene il germe della soluzione , e mostra la via da prendersi;* ed io credo che si daranno pochi casi, nei quali non si giungerà a proposizioni più o meno importanti, quand' anche non si saprebbe rispondere completamente alla questione a motivo della complicazione dei calcoli. Questo metodo , incontrastabilmente l' unico scientifico, siccome l' unico del quale si sa anticipatamente che può condurre allo scopo proposto , fu poco usato nelle matematiche in causa della *estrema complicazione* a cui sembra soggetto nella maggior parte dei problemi, sopratutto quando abbiano una certa generalità; ma in moltissimi casi questa complicazione non è che apparente e sparirà subito in sul principio. Io trattai in questa maniera varj rami dell' analisi , e quantunque mi sia proposto sovente dei problemi che sorpassarono le mie forze , giunsi tuttavia ad un

gran numero di risultati generali, che gettano molta luce sulla natura delle quantità, la cui cognizione forma l' oggetto delle matematiche » (1).

Dopo di ciò, in speciale riguardo delle ricerche che dianzi dicemmo dover noi mettere in rilievo, segue: « Nel calcolo integrale sopratutto questo metodo è di facile applicazione. Darò in altra occasione i risultati che ottenni in queste ricerche, non che il procedimento che mi vi condusse. » Ma quella morte immatura, che gli toglieva di prosegnire queste, come tutte le altre investigazioni, gl' impediva altresì di render noti tutti i risultati già ottenuti. Nel campo delle ricerche, di cui ora dobbiamo riferire, questi risultati dovettero essere certamente assai numerosi ed importanti, se si riflette alle dichiarazioni ch' ebbe a fare e che qui in parte riprodurremo. Nella lettera da lui scritta il 25 Novembre 1828 a Legendre (2) dice:

« Oltre le funzioni ellittiche vi hanno due altri rami dell' analisi, dei quali mi sono molto occupato, cioè la teorica dell' integrazione delle formole differenziali algebriche e la teorica delle equazioni. Per mezzo di un metodo particolare ho trovato molti risultati nuovi, che godono sopratutto d' una grandissima generalità. Ho preso le mosse dal seguente problema della teorica dell' integrazione: »

« Essendo proposto un numero qualunque di integrali

$$\int y\, dx\,,\ \int y_1\, dx\,,\ \int y_2\, dx\,,\ \text{ecc.}$$

dove $y, y_1, y_2, \ldots$ sono funzioni algebriche qualunque di x, trovare tutte le relazioni possibili fra essi, che possano esprimersi per funzioni algebriche e logaritmiche. »

(1) Le idee tracciate nel brano qui riprodotto inspirarono tutte quante le ricerche di Abel. Egli non ricorre mai nè a tentativi, nè ad artifici di sorta. Suol proporsi questioni di una generalità sorprendente, ed i ragionamenti, coi quali penetra nella risoluzione di ogni questione, sembrano presentarsi così spontaneamente l' uno dopo l' altro, che chiunque, leggendoli, è tentato di credere, che, all' uopo, si sarebbero presentati nella stessa maniera alla sua propria mente.

(2) *OEuvres Complètes*, Tomo 2, pag. 260

« Ho da prima trovato, che una relazione qualunque deve avere la forma seguente :

$$A\int y\,dx + A_1\int y_1 dx + A_2\int y_2 dx + \ldots = u + B_1\log v_1 + B_2\log v_2 + \ldots,$$

in cui $A, A_1, A_2, \ldots B_1, B_2, \ldots$ ecc. sono costanti, ed $u, v_1, v_2, \ldots$ funzioni *algebriche* di x. Questo teorema facilita estremamente la soluzione del problema; ma il più importante è il seguente: »

« Se un' integrale $\int y\,dx$, in cui y è legata ad x da una equazione algebrica qualunque, può esprimersi in qualche modo *esplicitamente od implicitamente* per funzioni algebriche e logaritmiche, si potrà sempre supporre :

$$\int y\,dx = u + A_1\log v_1 + A_2\log v_2 + \ldots + A_m\log v_m,$$

dove $A_1, A_2, \ldots$ sono costanti, ed $u, v_1, v_2, \ldots v_m$ *funzioni razionali* di x ed y. »

Dopo altre indicazioni sopra queste ricerche, aggiunge :

« Le belle applicazioni, ch' avete dato delle funzioni ellittiche all' integrazione delle formole differenziali, mi hanno impegnato a considerare un problema generalissimo a questo riguardo, cioè : »

« Esprimere, se sia possibile, un' integrale della forma $\int y\,dx$, ove y sia una funzione algebrica qualunque, per funzioni algebriche, logaritmiche ed ellittiche nel modo seguente :

$$\int y\,dx = \text{funz. algeb. di } (x, \log v_1, \log v_2, \log v_3, \ldots,$$
$$\Pi_1(z_1), \Pi_2(z_2), \Pi_3(z_3), \ldots),$$

$v_1, v_2, v_3, \ldots, z_1, z_2, z_3, \ldots$ essendo funzioni algebriche di x, le più generali possibili, e $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \ldots$ esprimendo integrali ellittici qualunque in numero finito. Ho fatto il primo passo verso la soluzione di questo problema, dimostrando il teorema seguente : »

« Se è possibile di esprimere $\int y\,dx$ nel modo anzidetto, si potrà sempre dare alla sua espressione la forma seguente :

$$\int y\,dx = t + A_1\log t_1 + A_2\log t_2 + \ldots$$
$$+ B_1\Pi_1(y_1) + B_2\Pi_2(y_2) + B_3\Pi_3(y_3) + \ldots,$$

dove $t, t_1, t_2, \ldots, y_1, y_2, y_3, \ldots$ sono tutte funzioni *razionali* di x ed y; ma, conservando alla funzione y tutta la sua generalità, fui arrestato a questo punto da difficoltà superiori alle mie forze e che non vincerò mai. Mi sono dunque contentato di alcuni casi particolari, principalmente di quello in cui y è della forma $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r ed R essendo funzioni razionali qualunque di x, che è già molto generale ».

Nel *Précis d' une théorie des fonctions elliptiques* (1), all' occasione del teorema precedentemente citato sull' esprimibilità di $\int y\, d\, x$ per funzioni algebriche e logaritmiche, dice:

« Ho fondato sopra questo teorema una nuova teorica della integrazione delle formole differenziali algebriche, che fin' adesso non ho ancora potuto pubblicare. Questa teorica oltrepassa di molto i risultati conosciuti, ed il suo scopo è di operare *tutte le riduzioni possibili* degli integrali delle formole algebriche, per mezzo delle funzioni algebriche e logaritmiche. Si giunge per tal modo a ridurre al minimo numero possibile gli integrali che rappresentano sotto forma finita tutti gli integrali di una stessa classe ».

Ma disgraziatamente, nelle Memorie venute in luce si prima che dopo la sua morte, non trovansi trattati che alcuni casi particolari delle questioni in discorso. Il primo trovasi fra i lavori postumi e versa sulla riduzione degli integrali ellittici al minimo numero di trascendenti. Come il sig. Weierstrass osserva (2), questa quistione è manifestamente una delle prime da lui trattate; la esposizione è ancora poco elegante, e la soluzione del problema proposto viene raggiunta più per mezzo di meccaniche calcolazioni, adatte al caso speciale preso di mira, che per mezzo di principj generali. In un' altro lavoro da lui pubblicato nel tomo I del giornale di Crelle, tratta la questione di trovare tutti i differenziali della forma $\frac{\rho\, d\, x}{\sqrt{R}}$, i cui integrali possano espri-

(1) *Œuvres Complètes*. Tomo I, pag. 333.

(2) Nella Nota *Ueber die Integration algebraischer Differentiale vermittelst Logarithmen*, inserita nel *Monatsbericht der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*. 26 *Febr.* 1857.

mersi per una funzione della forma $\log\left(\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}}\right)$, essendo ρ, R, p, q simboli di funzioni intere della x; d' onde risulta l' importante teorema, che la esprimibilità non ha luogo se non quando la frazione continua, secondo cui $\sqrt{R}$ può svilupparsi, riesca periodica.

Abel muore nell' Aprile del 1829, disparendo, non anche compiuti i 27 anni, da quel grandioso campo di studi, dove al degno suo emulo, allora poc' oltre il ventiquattresimo anno, restavano da cogliere altri splendidi allori, e dove ancora si doveva ammirare il quasi ottuagenario Legendre.

Giunti a questo punto, innanzi di proseguire nella esposizione delle *Notizie*, diremo qualche parola dell' ordinamento che abbiamo dato alle medesime. Importando assai più di tener dietro alla concatenazione delle idee che all' ordine cronologico, pensammo di scindere il complesso delle notizie in due serie; riunendo in una prima serie, colle notizie già date, le altre concernenti i lavori che si possono considerare come più direttamente provocati dai già detti di Legendre, Abel e Jacobi; e formando una seconda serie colle notizie di quei lavori che si possono invece considerare come traenti origine, non già dalle trascendenti ellittiche, ma piuttosto principalmente dal pensiero di introdurre e dare infine il dovuto posto in *tutto il campo dell' analisi* alla tanto feconda considerazioue della variabilità complessa. (1)

(1) In questa serie dominano per lungo tratto i lavori di Cauchy. È in essa che più propriamente vedremo costituirsi gli elementi della moderna teorica generale delle funzioni, vale a dire della teorica delle funzioni basata sul concetto il più esteso possibile della variabilità, sul concetto della variabilità complessa La qual teorica, del resto, potrebbe concepirsi in senso così lato da abbracciare in se, come casi particolari, anche le varie teoriche speciali sviluppatesi con lavori della prima serie.

Vogliasi poi riflettere, che, se una distinzione dei lavori in due serie può in complesso giovare assai alla chiarezza e connessione delle nostre *Notizie*, non può tuttavia riescire senza inconvenienti. Vari lavori, che porremo nell' una, troverebbero posto opportuno anche nell' altra. Saremo costretti a lasciare lungo intervallo tra le indicazioni di lavori dell' una e dell' altra serie, i quali nella realtà stanno invece in assai stretta colleganza tra loro; essendo, per esempio, non di rado accaduto, che da lavori dell' una serie emergessero quelle

Avendo principiato, come ben si doveva, colla prima serie, ora proseguiremo esclusivamente colla medesima, sino a che l' avremo esaurita. Ma osserviamo, che in questa stessa serie (come poi anche nella seconda) giova violar nuovamente l' ordine cronologico per seguire sempre meglio la figliazione delle idee.

Prendendo a considerare le idee esternate da Legendre nel principio della introduzione al *Traité* si è portati a seguire senza interruzione tutte quelle ricerche, che versano principalmente sulle quadrature ossia sugli integrali considerati di preferenza come funzioni dei loro limiti, quali sono le ricerche sulla classificazione e sulla riduzione di tutti gli integrali di ciascuna classe a certi tipi o *forme canoniche* irriducibili tra loro e della maggior possibile semplicità, le ricerche delle varie trasformazioni degli integrali, ed in generale delle loro proprietà, non che dei mezzi di calcolarne i valori approssimati. Appartengono a questa schiera, essendo in sostanza (come negli stessi brani su riferiti vien detto) questioni di riduzione degli integrali ad altri integrali ossia funzioni più semplici, quelle ricerche che citammo da ultimo siccome esse pure avviate colla solita maestria da Abel, sull'integrazione cioè delle formole differenziali algebriche.

Prendendo invece a considerare la idea che tradussero in atto Abel e Jacobi, di introdurre cioè nella teorica delle trascendenti ellittiche le funzioni inverse, si è portati a seguire senza interruzione tutti quei lavori, che hanno per iscopo la inversione degli integrali, non che la formazione delle teoriche per le funzioni inverse, propriamente dette, e per le altre specie di trascendenti che la inversione conduce a considerare (1).

---

idee che furono l' occasione ed il fondamento di lavori dell' altra. Ciò si potrà riscontrare, fra gli altri, nel caso delle ricerche sulle funzioni doppiamente periodiche, intraprese dai sigg. Liouville ed Hermite, partendo dal concetto della doppia periodicità; ricerche che noi ci siamo indotti a menzionare nella seconda serie.

(1) Anche questa suddivisione non è scevra da inconvenienti. Chi abbia anche soltanto conoscenza dei *Fundam. Nov.* riconoscerà, almeno per le trascendenti ellittiche, come inevitabilmente si leghino, s' intreccino tra loro le ricerche dell' una e dell'altra parte. Tuttavia, abbiamo vantaggioso di attenerci per quanto possiamo alla medesima.

Legendre piglia le mosse dalla riferita Memoria abeliana *Remarques sur quelques propriétés* ... per proseguire l' effettuazione delle proprie idee, replicatamente citate, gettando i primi fondamenti di una teorica dettagliata degli integrali iperellittici (1). In primo luogo distingue questi integrali in classi, a seconda del grado della funzione intera φ contenuta nel radicale, risguardando cioè : come integrali di prima classe quelli per i quali il grado di φ sia 3 o 4 ; di seconda classe quelli per i quali il grado di φ sia 5 o 6; ed in generale, di $(m-1)^{esima}$ classe quelli per i quali il grado di φ sia $2m-1$ o $2m$ (2). Il carattere che giustifica questa prima divisione, in quanto che rivela una diversità essenziale fra le classi, ossia mostra impossibile la riduzione di una classe qualunque ad una classe inferiore, fatta ben' inteso astrazione da casi particolari, si è quello del minimo numero di integrali, per la cui somma, coll' aggiunta di una espressione algebrica e logaritmica, riesce esprimibile, come fu detto, secondo il teorema abeliano, la somma di un numero qualsivoglia di integrali della stessa natura. Per la prima classe, cioè per gli integrali ellittici, questo numero è 1 ; per la classe $(m-1)^{esima}$ è $m-1$.

Stabilita la divisione in classi, egli fa riflettere, che si può stabilire una suddivisione in specie, cioè, che gli integrali in ciascuna classe possono dividersi in tre specie, come gli ellittici. Ciò che caratterizza la specie è la natura della espressione algebrica e logaritmica su nominata. Come per gli ellittici, così in generale, questa espressione è una costante per gli integrali della prima specie, è semplicemente algebrica per gli integrali della seconda specie, è semplicemente logaritmica per gli integrali della terza specie. Questa suddivisione, che piu tardi vedremo anche dettata da altro punto di vista, va fissata non meno attentamente della divisione in classi od ordini. Si vedrà,

(1) Vedi il terzo Supplemento al *Traité*.

(2) Nella enumerazione delle classi però venne poscia in uso di lasciare in disparte gli ellittici e principiare cogli iperellittici, dicendosi quindi integrali iperellittici di *primo classe* o *primo ordine* quelli che Legendre disse della classe portante il numero 2, e così via.

che le funzioni inverse, proposte da Jacobi alla investigazione degli analisti, sono, precisamente come nel caso degli ellittici, le inverse degli integrali di prima specie; e ch' egli è, ancora come per gli ellittici, nella considerazione degli integrali di seconda e terza specie, che si giunge nel modo il più naturale alla scoperta di una funzione, la quale tenga nella teorica delle trascendenti abeliane anche le più generali lo stesso posto, che la funzione di Jacobi nella teorica delle trascendenti ellittiche.

Nello stesso §. del supplemento in discorso, il nostro autore tratta della riduzione di tutti gli integrali d' una stessa classe a determinati tipi, come per gli integrali ellittici. Ma non crediamo opportuno di qui entrare in maggiori dettagli circa questo punto, come neppure circa l' altre ricerche contenute nel medesimo supplemento (1).

Mentre la grande Memoria di Abel giaceva inedita presso l' Accademia di Parigi, ed anche più tardi, parecchi matematici andarono pubblicando risultati più o meno generali intorno alle trascendenti di integrazione, sviluppando le idee da Abel fatte conoscere nel giornale di Crelle ed anche proseguendo le discussioni e riduzioni degli integrali principiate da Legendre, le loro trasformazioni, ecc. Ma, sebbene importanti per uno studio dettagliato degli integrali stessi, noi possiamo in queste *Notizie* tacere di simili risultati, in quanto che non veniamo ad ommettere idee essenziali per il seguito, e non sapremmo riassumerli in pochi e semplici teoremi di grande e generale importanza per il nostro corso. Ci contenteremo pertanto di avvertire, che i medesimi rinvengonsi nel giornale di Crelle e

(1) Forse non sembrerà superfluo l' avvertire, che Legendre incorreva in una inesattezza, lasciando credere che l' integrale

$$\int \frac{x^e \, d\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}} \qquad \text{(pag. 187 del Suppl.)}$$

appartenesse sempre alle prime due specie della rispettiva classe.

sono dovuti agli insigni matematici Richelot, Broch, Minding, Rosenhain ed altri (1).

Noi vorremmo poter citare ogni singola ricerca nel posto per essa più adatto, e però vorremmo adesso in particolare poter dire parola di tutte quelle parti, che qui fossero per convenire, anche degli studi assai generali intrapresi in questi ultimi anni da celebri matematici che avremo da nominare più volte in queste *Notizie* e più ancora nel progredire del nostro corso. Ma le informazioni che di tali studi essi diedero colla stampa sono così scarse, e ciò che in questo punto potrebbe forse star bene trovasi ad ogni modo (come per il meglio doveva avvenire) così strettamente intrecciato con quanto viene ad avere posto più acconcio in seguito, che sembra miglior partito riservarne i pochi cenni per noi possibili a queste successive occasioni. Crediamo però di dover qui segnalare alcuni scritti molto importanti dei sigg. Aronhold e Brioschi.

Il sig. Aronhold, eccitato dalle ricerche del sig. Weierstrass di cui fra breve daremo il titolo, compiva e presentava nel 1861 all'Accademia delle Scienze di Berlino (2) una riduzione algebrica dell'integrale

$$\int F(x, y)\, d x$$

alla forma fondamentale delle trascendenti ellittiche, F significando qualsiasi funzione razionale di x, y e fra x, y sussistendo una equazione di terzo grado della forma la più generale; e nel tomo 61 del giorn. di Crelle-Borchardt somministrava una nuova trattazione algebrica degli integrali della forma

$$\int \Pi(x, y)\, d x \ ,$$

(1) Nella prima delle Memorie del sig. Richelot, alle quali s'intende qui fatta allusione, (*De integralibus Abelianis primi ordinis commentatio prima.* Crelle tomo 12) il risultato principale è: che un'integrale iperellittico non può trasformarsi in altro integrale iperellittico della stessa classe, per mezzo di una sostituzione razionale, se questa non sia del primo ordine. La qual cosa costituisce non poco rimarchevole divario da ciò che ha luogo per gli integrali ellittici.

(2) Vedi i *Monatsberichte* del detto anno, pag. 462.

essendo Π ancora funzione razionale qualsiasi di x, y e fra x, y sussistendo una equazione generale di secondo grado.

Il sig. Brioschi pubblicava nei *Comptes R.* degli anni 1863, 1864 (tomi 56, 59) una seconda trasformazione per la riduzione del suddetto integrale

$$\int F(x, y)\, dx$$

basata sulla teorica dei covarianti delle forme ternarie; ed una Memoria sulla moltiplicazione delle funzioni ellittiche.

Coi suddetti lavori, che introducono nella trattazione algebrica degli integrali in questione molta eleganza e semplicità, i sigg. Aronhold e Brioschi diedero i primi esempi di rappresentazione delle coordinate dei punti di certe linee piane in funzioni ellittiche di un parametro, concetto sviluppato ed esteso dal sig. Clebsch nelle sue preziose Memorie contenute nei tomi 63, 64 del giorn. di Crelle-Borchardt.

Riprendiamo adesso il filo delle ricerche che già vedemmo avviate da Abel sulla integrazione dei differenziali algebrici in termini finiti. Dopo di lui dobbiamo subito menzionare il sig. Liouville, il quale dal 1832 in poi andava presentando all' Accademia delle Scienze i risultati di sue investigazioni sull' argomento. Anteriormente al sig. Liouville e ad Abel stesso avremmo potuto citare Condorcet e Laplace, a qualche teorema del quale forse si deve che il sig. Liouville abbia rivolto a simili ricerche la propria attenzione.

Ma ritornando al sig. Liouville, egli presenta dapprima due Memorie *Sur la détermination des intégrales, dont la valeur est algébrique* (1). In esse dà un metodo per decidere se l' integrale $\int y\, dx$, dove y s' intende funzione algebrica di x, sia o non sia esprimibile in termini algebrici, e per trovarne il

(1) Queste Memorie possono leggersi nel 22 *Cahier* del giornale della scuola politecnica Nel tomo 10 del giornale di Crelle, in seguito al rapporto di Poisson sulle medesime, e nel tomo 3 del proprio giornale, il sig. Liouville espone delle semplificazioni ed aggiunte alle Memorie stesse.

valore nel caso affermativo. Egli considera in primo luogo gli integrali razionali di un sistema di equazioni differenziali lineari di un' ordine qualunque a coefficienti razionali; e fa vedere come si possano trovare siffatti integrali, ove esistano, ovvero dimostrare che non esistono. In secondo luogo dimostra, che, se l' integrale è algebrico, può sempre supporsi ridotto alla forma

$$\int y\,dx = \alpha + \beta y + \gamma y^2 + \ldots + \lambda y^{m-1},$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ essendo funzioni razionali di x, legate a questa variabile da altrettante equazioni differenziali lineari. Tutto adunque si riduce a cercare, col procedimento già esposto, gli integrali razionali di queste equazioni; non esistendo i quali, si verrebbe nella certezza che $\int y dx$ non è esprimibile algebricamente. Nella prima delle due Memorie considera propriamente il solo caso di y funzione algebrica esplicita. Un corollario di uno dei teoremi, ch' ivi espone, è, che gli integrali ellittici di prima e seconda specie non si possono esprimere algebricamente mediante il loro limite variabile.

In seguito presenta una Memoria *Sur les transcendantes elliptiques de première et de deuxième éspèce, considérées comme fonctions de leur amplitude* (1), la quale egli considera come la prima parte di una teorica generale, avente per iscopo di determinare il valore di $\int y\,dx$, allorquando si possa esprimere esplicitamente coll' adoperare un numero finito di volte i segni $\varpi(x)$, e^x, $\log x$. Con $\varpi(x)$ egli intende una funzione algebrica tanto esplicita che implicita della x. Stabilisce una classificazione delle funzioni trascendenti in specie, analoga a quella che precedentemente stabiliva per le funzioni irrazionali. L' oggetto del primo paragrafo è il teorema fondamentale che: Se l' integrale $\int y\,dx$ è esprimibile nella maniera sopra indicata, si potrà sempre supporre ridotto alla forma

$$\int y\,dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_m \log v_m.$$

(1) Si può leggere nel 23 *Cahier* del giornale della scuola politecnica.

Il risultato del terzo ed ultimo paragrafo, che l'autore fa scopo della Memoria, è: che gli integrali ellittici di prima e seconda specie non sono esprimibili nell' anzidetta maniera.

Ottenute queste interessanti conclusioni sugli integrali ellittici, considerati come funzioni del loro limite, il sig. Liouville prende ad investigare gli integrali stessi, considerati come funzioni del loro modulo (1). Credo conveniente di qui riportare alcuni brani della introduzione alla memoria su quest' argomento.

« Dando al modulo un valor fisso, che suppongo diverso da zero, i due integrali ellittici di prima e seconda specie dipendono soltanto dall'amplitudine e costituiscono, come altrove ho dimostrato, delle trascendenti affatto distinte dai logaritmi e dalle esponenziali, dimodochè non si possono scrivere sotto forma finita col mezzo dei soli segni algebrici, esponenziali e logaritmici . . . . »

« Dando invece all' amplitudine un valore fisso diverso da zero e lasciando variabile il modulo, i suddetti integrali diverranno funzioni del modulo, e si può domandarsi, se sarà ancora impossibile di esprimerli sotto forma finita in termini algebrici, esponenziali e logaritmici, rispetto alla nuova variabile. Or bene sono giunto a dimostrare che sussiste appunto questa impossibilità; ma l' analisi di cui mi sono valso per tal fine differisce assai da quella che ho impiegato nella Memoria del 1833 (23 *Cahier* del giornale della scuola politec.) Gli integrali ellittici di prima e seconda specie, considerati come funzioni del modulo, soddisfanno infatti a due equazioni differenziali del second' ordine assai complicate; mentre come funzioni dell' amplitudine sono semplici integrali indefiniti, di cui è noto l' elemento . . . . . Pertanto gli integrali ellittici sono trascendenti di un' ordine più elevato rispetto al modulo che rispetto all' amplitudine. »

« Queste ricerche, e parecchie altre, che pubblicai anterior-

(1) La Memoria contenente queste ulteriori ricerche, presentata all' Accademia nel 1840, può leggersi nel tomo 5 del giornale del sig. Liouville, pag. 441. Alla pag. 34 trovasi una introduzione alla medesima.

mente, appartengono ad una grande teorica, che i geometri non hanno ancora studiato, io credo, colla debita perseverante attenzione. Questa teorica ha per oggetto di scoprire, in ogni questione, tutte le soluzioni che possono scriversi col mezzo d' un numero limitato di segni analitici dati anticipatamente, o di dimostrare che soluzioni di tal sorta non esistono. Essa sola può condurre ad una classificazione veramente filosofica delle trascendenti . . . . . . Non è egli evidente . . . . che dopo aver aggiunto alle funzioni algebriche le funzioni esponenziali e le funzioni logaritmiche , le quali non possono ridursi tra loro , bisogna, ogni qualvolta s' incontri una quantità nuova, cercare se si possa o no esprimere mediante le funzioni già conosciute ? »

Per non lasciare troppo incompleta la rivista di ciò che si deve al sig. Liouville sull' argomento, aggiungeremo che : nel tomo 13 del giorn. di Crelle si trova una Memoria (1) sugli integrali della forma

$$\int e^x y \, dx \ ,$$

essendo y funzione algebrica di x; nel tomo 4 del di lui giornale una Memoria (2) sulla integrazione dell' equazione

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = P . y \ ,$$

essendo P funzione intera della x ; nel tomo 6 dello stesso giornale uno scritto sull' equazione di Riccati, steso per dimostrare che i casi di integrabilità in termini finiti (nel solito senso) sono precisamente soltanto quelli che già si conoscevano.

Quest' ultimo lavoro porse occasione ad una bella Memoria del prof. Genocchi (3) , comparsa nel 1865; la quale del resto abbraccia assai più che non la sola equazione di Riccati. Lo stesso matematico presentava già un anno prima, parimenti

(1) *Mémoire sur l' intégration d' une classe de fonctions transcendantes.*

(2) *Mémoire sur l' intégration d' une classe d' équations différentielles du second ordre en quantités finies explicites.*

(3) *Studi intorno ai casi di integrazione sotto forma finita.* Memorie dell' Accademia di Torino. Serie 2 Tomo 23.

all' Accademia torinese, una Memoria intorno alle equazioni differenziali, a cui conduce la trasformazione delle funzioni ellittiche.

Come scritti italiani dello stesso genere citeremo anche: le *considerazioni* che il prof. Mainardi pubblicava nel 1846 (1) *sulla integrazione della formola*

$$\frac{F}{E\sqrt[3]{\Psi}},$$

F, E, Ψ essendo funzioni intere di una medesima variabile; alcuni scritti del sig. C. Piuma, uno dei quali nel tomo 4 degli annali del prof. Tortolini; ed una Memoria del P. Pepin nel tomo 5 degli stessi annali, nella quale, collegandosi colla Memoria del sig. Liouville sull' equazione

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = P y ,$$

espone una soluzione del problema: Essendo data l' equazione differenziale

$$\frac{d^2 z}{d x^2} + Q\frac{d x}{d z} + R z = o ,$$

in cui Q ed R esprimono funzioni razionali di x, decidere se z si possa esprimere con un numero limitato di segni algebrici, esponenziali, logaritmici e di segni di integrazione indefinita rispetto ad x.

Ritorniamo ai lavori dei matematici stranieri. Dopo il sig. Liouville incontriamo l' eminente matematico di Russia, il sig. Tchebichef. Questi pubblicava nel 1853 una Memoria (2) sulla integrazione per funzioni algebriche e logaritmiche di una espressione formata razionalmente colla variabile e con una radice di una funzione intera, indicando come si possa trovare la parte algebrica dell' integrale e determinare la forma dei

(1) Volume 2 delle Memorie dell' Istituto Veneto.

(2) *Sur l' intégration des différentielles irrationnelles*. giorn. di Liouville tomo 18.

termini logaritmici. La completa determinazione di questi termini non vi è trattata.

Nell' anno successivo compare una sua seconda Memoria sulla integrazione per funzioni algebriche e logaritmiche dei differenziali contenenti una radice quadrata di una funzione intera del terzo e quarto grado (1). In questa, dopo aver determinato colle regole date nella prima Memoria la parte algebrica ed il numero dei termini logaritmici, l' autore scrive le equazioni che servono a determinare le funzioni affette dai segni logaritmici e mostra il modo di ridurre queste equazioni, spesso assai complicate, ad altre simili più semplici, riducendo così infine la questione a quella trattata da Abel, nel tomo 1 del giorn. di Crelle (2).

Ma, secondo il metodo di risoluzione che da questo lavoro di Abel scaturisce, bisognerebbe sviluppare il radicale in frazione continua e proseguire lo sviluppo sino a che se ne manifestasse la periodicità, qualora la medesima esistesse. Ma, non conoscendosi anticipatamente il numero dei termini del periodo (od un limite superiore di esso numero), è chiaro che, nel caso ove manchi la periodicità, siffatto metodo condurrebbe a proseguire indefinitamente lo sviluppo senza mai ottenere un risultato che desse sicuro avviso di questa mancanza. Onde rimediare a tale difetto il sig. Tchebichef presenta un nuovo metodo (3) nel *Bulletin de l' Académie de St-Pétersbourg* per l' anno 1860 (tomo 3). Seguendo questo metodo, con due serie di operazioni algebriche, il numero delle quali in ciascuna serie

(1) *Mémoires de l' Académie imp. des Sciences de St-Pétersbourg. Sixiéme Série. Sciences math. et phys. T.* 6. Ovvero, giornale di Liouville, tomo 2 della serie 2.

(2) Questa Memoria diede occasione ad una *Nota intorno la integrazione delle funzioni irrazionali* pubblicata negli annali del prof. Tortolini per l' anno 1856.

(3) La relativa Memoria ha per titolo: *Sur l' intégration de la differentielle*

$$\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}\,dx\,.$$

L' autore ne diede un' estratto nei *Comptes R.* dell' Accad. di Parigi (tomo 51). Sì la Memoria che l' estratto comparvero poi anche nel tomo 9 della serie 2 del giorn. di Liouville.

non può superare un limite determinabile anticipatamente, o si raggiunge la certezza della impossibilità dell' integrazione nel modo desiderato, o si effettua questa integrazione completamente. Il metodo però vale soltanto per il caso in cui i coefficienti della funzione intera sotto il segno radicale sieno razionali (1).

La seconda Memoria del sig. Tchebichef determinava il sig. Weierstrass ad indicare, con lettura del 26 Febb. 1857 dinanzi all' Accad. delle scienze di Berlino (2), come si potesse fare la stessa ricerca in maniera più semplice e più chiara. In essa faceva dapprima riflettere « che il problema stesso (limitato com' è alla radice quadrata di una funzione intera del quarto grado) trovasi propriamente già a pieno risoluto in virtù dei principi svolti da Abel nel suo ultimo lavoro, sgraziatamente incompiuto, concernente le relazioni più generali possibili tra funzioni ellittiche, logaritmiche ed algebriche; *i quali principi permettono nel tempo stesso di formarsi un concetto più chiaro e più profondo della natura della cosa, di quello che si possa ottenere, proponendosi di raggiungere il risultato immediatamente con un calcolo algebrico, di necessità assai complicato, senza riferirsi alla teorica della intiera classe di quantità, a cui appartiene quella presa in considerazione* ».

Il saggissimo riflesso contenuto nel secondo periodo di questo brano merita tutta l' attenzione; esso caratterizza già in parte il metodo seguito dal sig. Weierstrass nella detta particolare ricerca, o più in generale, caratterizza già in parte il metodo che in tutte le ricerche di simil natura venne con

(1) Crediamo dover citare a questo proposito le sostituzioni indicate dal sig. Hermite (*Crelle*, tomo 52) e dal sig. Brioschi (*Annali di matematica*, tomo 3; *Comptes R.*, tomo 56; *Rendiconto* dell' adun. 24 Febbr. 1864 del R. Istit. Lombardo), per le quali il differenziale $\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$, dove $\varphi(x)$ significa funzione intera del quarto grado, si trasforma per modo che la espressione sotto il segno radicale riducesi a non contenere altri coefficienti letterali che gli invarianti quadratico e cubico della forma $\varphi(x)$; perchè appunto i criteri ed i limiti stabiliti nella sua Memoria dal sig. Tchebichef diventano, per le sostituzioni stesse, più evidenti, ed acquistano un carattere di maggiore generalità.

(2) Vedi la Nota *Ueber die Integr.* già citata a pag. 30.

buona ragione a conseguire il predominio, ossia a sostituirsi ai metodi seguiti nei lavori dianzi citati (1).

Il sig. Weierstrass deve aver compiuto ricerche generalissime sull' argomento di cui stiamo riferendo. Ma di esse non siamo in grado di dare alcuna precisa informazione, attesochè finora non abbiamo potuto averne alcuna esatta contezza. L' illustre matematico, forse per cagione delle gravi malattie, ma, del resto, non unico fra i Sommi nel rifuggire dalle noje gravose della stampa, non diede finora alle medesime vera pubblicità; limitandone la comunicazione alla stretta cerchia degli amici o dei colleghi nell' Accademia. Chi, bramoso di conoscere siffatti studi, ricorre alle pubblicazioni dell' Accademia, fa passare indarno i volumi delle Memorie e nei resoconti mensili trova la più parte delle di lui comunicazioni segnate coll' asterisco, vale a dire ridotte al puro titolo. Fra queste citeremo con speciale rincrescimento, per riguardo alle ricerche di cui qui dovevamo compiere la indicazione, le seguenti: *Allgemeine Untersuchungen ueber die Integrale algebraischer Differentiale* (2). *Ueber die analytische Form der Integrale algebraischer Differentiale. Ueber die Theorie der allgemeinsten Abel' schen Transcendenten* (3).

Come già si è potuto alcun poco vedere, le ricerche sull' integrabilità, con date funzioni, delle formole differenziali non procedettero separate dalle analoghe ricerche per le equazioni differenziali. Ciò è ben naturale; dappoichè le prime ricerche possono a dir vero considerarsi come casi particolari delle seconde. Di queste ci occuperemo espressamente nella seconda serie delle nostre *Notizie*; non già col proposito di dare una com-

(1) Per altro questi metodi non sono tutti veramente da abbandonarsi, e come osserva, e prova il prof. Genocchi, il metodo emergente dai principi del sig. Liouville, può pur sempre condurre a pregevoli risultati.

(2) Di esse non possiamo dir altro se non che ne fu comunicata una parte all' Accademia nella seduta del 6 Luglio 1857. Egli è da queste ricerche che il sig. Aronhold traeva motivo, come accennammo, di fare un importante lavoro.

(3) *Monatsberichte vom* 1865.

pleta indicazione di esse o, più in generale, d'ogni ricerca importante nell'argomento delle equazioni differenziali; ma col proposito, più ristretto e più adatto alle nostre forze, di mostrare che dalle moderne ricerche basate sulla variabilità complessa andò sorgendo per lo studio delle equazioni differenziali un nuovo metodo, che noi crediamo di poter qualificare come veramente scientifico e fecondo, metodo che si deve principalmente riconoscere dai lavori di Cauchy e dei signori Briot e Bouquet, Weierstrass, Riemann.

Passiamo adesso ai lavori che concernono la inversione degli integrali e le varie sorta di trascendenti che con essa si è condotti a considerare.

L' importanza dei risultati ottenuti colla introduzione delle funzioni inverse nella teorica delle trascendenti ellittiche non poteva a meno di provocare bentosto il tentativo della inversione degli integrali d' ordine superiore, e precisamente, in primo luogo, degli iperellitici di primo ordine. Così infatti avvenne: i tomi 9 e 13 del giornale di Crelle porsero le meditazioni di Jacobi a tale intento (1).

Queste meditazioni rivelavano però delle difficoltà affatto nuove. Jacobi faceva vedere (tomo 13), che la funzione inversa di un integrale iperellittico di primo ordine e prima specie deve possedere quattro periodi irriducibili fra loro. Ma, d'altra parte, ivi pure dimostrava, che, se una funzione di una sola variabile possiede più di due periodi irriducibili tra loro, essa deve possedere anche periodi infinitamente piccoli. Per ciò una funzione, la quale abbia un sol valore per ogni valore della variabile e sia sempre continua allorchè finita, come sono le circolari e le ellittiche, non può ammettere più di due periodi irriducibili (2). E pertanto, volendo escludere la con-

(1) *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis.* Tomo 9.

De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur. Tomo 13.

(2) Il sig. Puiseux presentò nel 1856 all' Accademia delle Scienze di Parigi la estensione di questa proposizione di Jacobi a funzioni di un numero qualunque di variabili con periodi simultanei. *Compt. R.*, tomo 43, pag. 321 e 681.

siderazione di funzioni trascendenti, che potessero comportarsi in modo ben diverso da quello già riconosciuto nelle funzioni circolari ed ellittiche, e sulle quali non fosse quindi possibile di costruire teoriche analoghe a quelle già costrutte sulle dette funzioni, bisognava rinunciare, cominciando dagli iperellittici di prim' ordine, all' idea d' introdurre nell' analisi funzioni di una sola variabile, che fossero inverse degli integrali considerati ad uno ad uno. Jacobi abbandonava quindi infatti il pensiero di una simile inversione; ma, non tale da acquietarsi a questo risultato puramente negativo, egli volle e riuscì a scoprire come si potesse tuttavia procedere ad una inversione degli integrali iperellittici, senza inciampare nelle difficoltà prenotate. Ei trovò che basta considerare, invece di un solo, p integrali (riferendoci agli iperellittici di un' ordine qualsivoglia $(p-1)^{esimo}$) di prima specie; prendere ognuno di essi con p diversi limiti superiori $x_1, x_2, \ldots, x_p$; eguagliare ognuna delle somme, composte coi p integrali così ottenuti da uno stesso, ad una nuova variabile. Ne risultano di tal guisa p equazioni fra i limiti $x_1, x_2, \ldots, x_p$ e le nuove variabili $u_1, u_2, \ldots, u_p$; e sono precisamente i p limiti, risguardati come dipendenti dalle p variabili $u_1, u_2, \ldots, u_p$, che Jacobi propone d' introdurre nell' analisi, come funzioni inverse per gli integrali in discorso. Tutto ciò è contenuto nelle stesse due precitate Memorie. La ragione di così fatte funzioni inverse venne desunta dal teorema abeliano; il quale per tal maniera diventò il fondamento di una delle più mirabili successioni di lavori che l' analisi possa noverare. Ma, per ben fissare le idee su questo punto cardinale, stimiamo opportuno di qui riportare quei brani della Memoria del tomo 9, che più specialmente si riferiscono alle funzioni inverse per gli integrali iperellittici di primo ordine (1).

(1) In questa Memoria Jacobi considera simultaneamente due questioni: quella delle funzioni inverse, e quella delle equazioni differenziali, di cui il teorema abeliano fornisce gli integrali algebrici. Le due questioni si congiungono così naturalmente tra loro nel teorema abeliano che non crediamo di dover escludere affatto i brani relativi alla seconda.

« Quando l' integrale

$$u = \int^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}}$$

sia ellittico, il teorema d' Eulero insegna, che, considerando x come funzione di u, $x = \lambda\,(u)$, la funzione $\lambda\,(u + u')$ della somma di due argomenti può esprimersi *algebricamente* mediante le funzioni $\lambda\,(u)$ e $\lambda\,(u^1)$ dei due argomenti separatamente; come dagli elementi si sa aver luogo per le funzioni circolari. Ora domando *quali sieno le funzioni inverse degli integrali abeliani e come si presenti, considerato dal loro punto di vista, il teorema abeliano.* »

« Il teorema d' Eulero dà *algebricamente* l' integrale generale dell' equazione differenziale

$$\frac{d\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}} + \frac{d\,y}{\sqrt{\varphi\,(y)}} = o\ ,$$

quando $\varphi\,(x)$ sia funzione intera del quarto grado. Ora domando, *quali sieno le equazioni differenziali, i cui integrali generali sono dati algebricamente dal teorema abeliano.* »

« Cominciamo dal caso più semplice degli integrali abeliani, dal caso cioè in cui $\varphi\,(x)$ sia del quinto o sesto grado. Ritenuto che sia

$$\int_0^{x} \frac{d\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}} = \Phi\,(x)\ ,\quad \int_0^{x} \frac{x\,d\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}} = \Phi_1\,(x)\ ,$$

pongo

$$\Phi\,(x) + \Phi\,(y) = u\,,\ \Phi_1\,(x) + \Phi_1\,(y) = v$$

e considero x ed y come funzioni di u e v, esprimendole con

$$x = \lambda\,(u,\,v)\ ,\ y = \lambda_1\,(u,\,v)\,.$$

Siffatte funzioni delle due variabili u e v sono quelle che bisogna introdurre nell' analisi, se si vuol conservare anche nelle abeliane l' analogia delle funzioni circolari ed ellittiche. Posto

$$\Pi(x) = \int_0^x \frac{A + A_1 x}{\sqrt{\varphi(x)}} dx$$

ossia

$$\Pi(x) = A\,\Phi(x) + A_1\,\Phi_1(x),$$

il teorema abeliano insegna che esiste una soluzione algebrica dell' equazione

$$\Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z) = \Pi(a) + \Pi(b),$$

e cioè, che si possano determinare algebricamente a e b per mezzo di x, y, z. Ma osservo, che il problema di determinare a e b per mezzo delle quantità date x, y, z è indeterminato, e che quindi il teorema abeliano, così proposto, non altro insegna se non che, fra le innumerevoli soluzioni della proposta equazione

$$\Pi(a) + \Pi(b) = \Pi(x) + \Pi(y) + \Pi(z),$$

havvene una algebrica. Ora però osservo, che le relazioni algebriche date dal ch. Abel, per le quali a e b vengono determinate mediante x, y, z, non dipendono per nulla affatto dalle quantità A ed A_1. Perciò le stesse due relazioni algebriche fra x, y, z, a, b soddisferanno simultaneamente all' una ed all' altra equazione trascendente

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(z)$$
$$\Phi_1(a) + \Phi_1(b) = \Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(z).$$

Ove queste due equazioni sieno date simultaneamente, le quantità a e b vengono ad essere totalmente determinate mediante le x, y, z. Pertanto il teorema abeliano, volendone rettamente considerare la forza e la natura, devesi proporre nel modo seguente

TEOREMA

Essendo proposte le equazioni simultanee

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(z)$$
$$\Phi_1(a) + \Phi_1(b) = \Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(z),$$

le quantità a e b possono determinarsi algebricamente per mezzo delle quantità date x, y, z. »

« Il teorema precedente si estende facilmente al caso in cui sia la somma di quattro o di qualsivoglia numero di trascendenti che si esprime per la somma di due, i cui argomenti dipendano algebricamente dagli argomenti delle prime. Considerando il caso in cui la somma di quattro debba esprimersi per la somma di due, il teorema abeliano, al medesimo applicato, insegna di nuovo, che date simultaneamente le due equazioni

$$\Phi(a) + \Phi(b) = \Phi(x) + \Phi(y) + \Phi(x') + \Phi(y')$$
$$\Phi_1(a) + \Phi_1(b) = \Phi_1(x) + \Phi_1(y) + \Phi_1(x') + \Phi_1(y')$$

le quantità a e b possono determinarsi algebricamente per mezzo delle quantità date x, y, x', y'. Ora poniamo

$$\Phi(x) + \Phi(y) = u \ , \quad \Phi(x') + \Phi(y') = u'$$

e

$$\Phi_1(x) + \Phi_1(y) = v \ , \quad \Phi_1(x') + \Phi_1(y') = v' \ ;$$

per le equazioni proposte si ha

$$\Phi(a) + \Phi(b) = u + u' ,$$
$$\Phi_1(a) + \Phi_1(b) = v + v' .$$

Ma, per la notazione superiormento introdotta, abbiamo viceversa

$$x = \lambda(u, v) \quad , \quad y = \lambda_1(u, v) \ ,$$
$$x' = \lambda(u', v') \quad , \quad y' = \lambda_1(u', v') ,$$
$$a = \lambda(u + u' , v + v') \ , \ b = \lambda_1(u + u' , v + v') \ .$$

E però, per le nuove funzioni $\lambda(u, v)$, $\lambda_1(u, v)$, abbiamo, come traduzione del teorema abeliano, il seguente

TEOREMA

Le funzioni

$$\lambda(u, v) \quad , \quad \lambda_1(u, v)$$

godono della proprietà simile a quella che dagli elementi si conosce aver luogo per le funzioni circolari ed ellittiche, cioè che le

$$\lambda(u + u', v + v') \quad , \quad \lambda_1(u + u', v + v')$$

si esprimono algebricamente mediante le

$$\lambda(u,v),\ \lambda(u',v')\ ;\ \lambda_1(u,v),\ \lambda_1(u',v').$$ » (1)

« Il teorema d'Eulero dà algebricamente l'integrale generale di un' equazione differenziale del prim' ordine fra due variabili, in essa separate. Così pure il teorema di Abel dà algebricamente $m-1$ integrali generali (cioè contenenti $m-1$ costanti arbitrarie) di $m-1$ equazioni differenziali del primo ordine fra m variabili, le quali sono in ciascuna equazione separate. Cominciamo ancora dal caso più semplice, cioè di $\varphi(x)$ del quinto o sesto grado. In tal caso sappiamo dal teorema abeliano, che le due equazioni trascendenti

$$\Phi(x)+\Phi(y)+\Phi(z)=\Phi(a)+\Phi(b)$$
$$\Phi_1(x)+\Phi_1(y)+\Phi_1(z)=\Phi_1(a)+\Phi_1(b)$$

tengono luogo di due equazioni algebriche fra le cinque quantità x, y, z, a, b. Consideriamo a e b come costanti; differenziando le due equazioni ora scritte, scompajono affatto a e b, e si ha

$$\frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}+\frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}}+\frac{dz}{\sqrt{\varphi(z)}}=o\,,$$
$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}}+\frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}}+\frac{z\,dz}{\sqrt{\varphi(z)}}=o\ .$$

Sono queste pertanto le due equazioni, di cui, nel caso semplicissimo preso in considerazione, il teorema abeliano dà algebricamente gli integrali generali, i quali sono appunto le due nominate equazioni algebriche fra x, y, z e le costanti arbitrarie a, b. » (2)

(1) Esposto questo *teorema d' addizione degli argomenti* per le funzioni inverse degli integrali iperellittici di prim' ordine, l' autore espone il teorema stesso per le funzioni inverse degli integrali iperellittici dell' ordine qualsiasi $m-2$. Indi passa alle considerazioni, che qui riportiamo, sulle equazioni differenziali.

(2) Dopo di ciò, l'Autore espone il sistema delle equazioni differenziali per il caso degli integrali iperellittici del second' ordine; tralasciando, siccome cosa affatto ovvia, di esporre il sistema generale, cioè corrispondente agli integrali dell' ordine qualsiasi $m-2$, il quale si compone di $m-1$ equazioni fra m variabili. Finalmente, termina la Memoria raccoman-

Ritornando alle funzioni λ e λ_1, esse sono bensì dotate di periodicità quadrupla, ma la periodicità, riferendosi adesso non più ad una sola variabile, sì bene alle due variabili u, v ad un tempo, non trae più seco le conseguenze additate per il caso di funzioni d'una sola variabile. La maniera di verificarsi della periodicità nella funzione λ, e lo stesso intendasi della funzione λ_1, sta espressa nell' equazione :

$$\lambda(u+nA+n'A'+n''A''+n'''A''',\ v+nB+n'B'+n''B''+n'''B''') = \lambda(u, v),$$

dove A, A', A'', A''' denotano i periodi relativi alla variabile u; B, B', B'', B''' quelli relativi a v; n, n', n'', n''' numeri interi arbitrari. Facendo crescere u, per esempio, del periodo A, bisogna far crescere nel tempo stesso v del periodo B, se si vuole che il valore di λ non soffra alterazione (1).

dando, come problema da risolvere, la diretta integrazione di questi sistemi di equazioni, in mode da ottenere una dimostrazione del teorema di Abel simile a quella che Lagrange riuscì a daro del teorema d' Eulero.

Siffatti sistemi d' equazioni, ossia dirò, *il sistema generale delle equazioni differenziali iperellittiche*, fu poscia designato col nome di *sistemo jacobiano*.

Circa la risoluzione di questo problema, si osservino : Jacobi (*Crelle*, tomo 24, pag. 28 e tomo 32, pag. 221), Richelot (*Crelle*, tomo 23, pag. 354 o tomo 25, pag. 97), Mainardi (Memorie di Mat. e Fis. della Società Italiana, toma 23. Modena, 1846), Minich (Memorie dell' Istituto Veneto, volume 3, 1847), Brioschi (*Crelle-Borchardt*, tomo 55). Nel 1862 il sig. Weierstrass presentò all' Accademia di Berlino una Nota sull' integrazione dello stesso sistema (*Monatsbericht von Februar*).

(1) Ciò che diciamo dello λ o λ_1 intendasi analogamente anche delle funzioni di qualsivoglia numero di variabili. Nell' argomento qui toccato figurano due diverse specie di considerazioni : considerazioni dirette a riconoscere quanta periodicità possa darsi in una funzione di una o di un certo numero di variabili, che debba possedere talune proprietà, come, per esempio, di avere un solo valore e di essere continua per ogni sistema di valori finiti dello variabili ; e considerazioni dirette a riconoscere quanti e quali periodi spettino a funzioni inverse, ossia quanti moduli di periodicità ad integrali proposti. Entrambo queste specie di considerazioni riceveranno il dovuto sviluppo nel corso delle nostre lezioni; ma in questa serie di notizie, come già si sarà notato, noi non lo tocchiamo che leggerissimamente. Le considerazioni della prima specie sono di un carattere elementare e puramente aritmetico; e per trarne le conclusioni, che importano nella teorica delle funzioni, basta di conoscere alcuni teoremi fondamentali, qual' è questo, che, se una funzione non varia per quanto si voglia breve tratto finito al variare della variabile per gradi insensibili entro limiti fra i quali la funzione debba avere un solo valore ed essere continua,

Finalmente faremo ancora notare in riguardo alle investigazioni di Jacobi sulle nuove funzioni (intendiamo si λ e λ_1 come le altre degli ordini superiori) che , in una Nota letta nel 1843 all' Accademia delle Scienze di Pietroburgo (1), egli indicò la proprietà che hanno di essere componibili algebricamente con funzioni di una sola variabile; proprietà che non è altro ancóra che una traduzione del teorema abeliano.

Passiamo ormai ad indicare i lavori provocati dal tracciato indirizzo jacobiano.

Il primo, che, a nostro credere, sia comparso intorno alle nuove funzioni, fu del 1843 , dovuto ad un' allievo del primo anno della scuola politecnica di Parigi : che tale era allora il sig. Hermite. Questo lavoro versa sulla divisione delle funzioni abeliane (2). Cominciando dalle funzioni abeliane del prim' ordine, vale a dire dalle funzioni λ e λ_1 (3), e rammentando la

essa non è propriamente una funzione, ma ono costante. Le considerazioni della seconda specie sono pure, al giorno d' oggi, affatto ovvie; ma tali non erano quando venivano in luce le due Memorie di Jacobi. Queste considerazioni, relative alla determinazione di tutti i valori, che un' integrale può assumere, senza che i suoi limiti si cambino, liberaronsi da ogni oscurità, mercè la idea della integrazione curvilinea, ossia con variabile complessa, introdotta, come vedremo, nell' analisi da Cauchy.

(1) *Bulletin de la classe phys.-math. de l' Acad. Tome* 2 *No.* 7. Od anche , *Crelle* , tomo 30, pag. 183.

(2) Il lavoro vien presentato all' Acead. delle scienze nella seduta del 10 Luglio. Nel *Compte Rendu* della seduta del 14 Agosto se ne trova il rapporto steso dal sig. Liouville. Questo rapporto si trova ancha nel tomo 8 del giornale del sig. Liouville , susseguito da una lettera di Jacobi al novello analista. Il lavoro venne poi pubblicato nel tomo 10 dei *Mèmoires prèsentès* . . .

(3) Essendo da noi qui sempre adoperati gli stessi segni λ e λ_1 per designare le funzioni inverse degli integrali iperellittici di prim' ordine e prima specie, giova avvertire che queste non s' intendono per ciò sempre definite precisamente come dapprima fu indicato , cioè mediante le equazioni

$$\int_0^{\lambda} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_0^{\lambda_1} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = u$$

$$\int_0^{\lambda} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_0^{\lambda_1} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} = v \quad .$$

In luogo di questi integrali potranno essere intesi altri fra quelli rappresentati in generale

proprietà fondamentale di queste funzioni, di essere cioè le quantità

$$\lambda\,(u+u',\,v+v')\quad,\quad \lambda_1\,(u+u',\,v+v')$$

radici di un' equazione di secondo grado, i cui coefficienti sono funzioni razionali di

$$\lambda\,(u,v),\quad \lambda_1\,(u,v),\ \sqrt{\varphi\ (\lambda(u,v))}\,,\ \sqrt{\varphi\ (\lambda_1(u,v))}$$

$$\lambda(u',v'),\quad \lambda_1(u',v'),\ \sqrt{\varphi\ (\lambda(u',v'))}\,,\ \sqrt{\varphi\ (\lambda_1(u',v'))}\ ;$$

riflette che, qualunque sia il numero intero n, le due funzioni $\lambda\,(nu,\,nv)$, $\lambda_1\,(nu,\,nv)$ saranno pure le radici di un' equazione di secondo grado a coefficienti razionali in

$$\lambda(u,v),\quad \lambda_1(u,v),\ \sqrt{\varphi\ (\lambda(u,v))}\,,\ \sqrt{\varphi\ (\lambda_1(u,v))}\ ;$$

per cui, mediante la risoluzione di due equazioni algebriche, si potrà determinare inversamente

$$\lambda\,(u,v)\quad \text{e}\quad \lambda_1\,(u,v)$$

per mezzo di

$$\lambda\,(nu,\,nv)\quad \text{e}\quad \lambda_1\,(nu,\,nv)\ .$$

In questa determinazione consiste appunto la *divisione* delle funzioni λ e λ_1. L' autore riesce ad effettuarla mediante radicali, ammettendo la divisione delle *funzioni complete.* Inoltre fa vedere che considerazioni affatto simili a quelle impiegate per il primo ordine si applicano agli altri ordini delle funzioni abeliane. Cosi

nella formola

$$\int \frac{A + A_1\,x}{\sqrt{\varphi\,(x)}}\,dx\ .$$

Faremo poi notare di passaggio che la *forma canonica*, ossia la forma sotto la quale sogliònsi di preferenza supporre gli integrali iperellittici di primo ordine, è quella che già si trova impiegata da Jacobi nella precitata celebre Memoria del tomo 13 in cui, cioè $\varphi\,(x)$ supponesi della forma

$$\varphi\,(x) = x\,(1-x)\,(1-\varkappa^2 x)\,(1-\lambda^2 x)\,(1-\mu^2 x)\ .$$

Le costanti $\varkappa^2, \lambda^2, \mu^2$ s' immaginano, d' ordinario, reali positive e minori dell' unità.

egli conseguiva, in tanto giovane età, per le equazioni a più incognite della divisione delle funzioni iperellittiche, quanto trovava di già fatto per le equazioni ad una sola incognita della divisione delle funzioni ellittiche.

Poco dopo, in un lavoro, di cui leggesi un' estratto nel *Compte Rendu* della seduta del 17 Giugno 1844, egli introduce le funzioni inverse per le trascendenti a differenziali algebrici qualunque, e somministra per esse importanti risultati. Comincia col generalizzare, mediante il teorema abeliano più generale, le considerazioni fatte da Jacobi mediante il teorema abeliano relativo agli integrali iperellittici nella già considerata Memoria del tomo 9 del giorn. di Crelle.

Successivamente, e cioè nel 1855, in notabilissime ricerche (1), le quali veramente dovrei accennare un po' più tardi, egli sviluppa la teorica della trasformazione delle funzioni abeliane del prim' ordine. Indicando con $f_1(u, v), \ldots, f_{15}(u, v)$ le quindici funzioni abeliane che si presentano (2) prendendo in considerazione le equazioni

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = u$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = v \quad ,$$

indicando inoltre con $F_1(u, v), \ldots, F_{15}(u, v)$ le altre quindici funzioni alle quali si giunge partendo dalle equazioni

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\alpha + \beta x}{\sqrt{\psi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{\alpha + \beta y}{\sqrt{\psi(y)}} = u$$

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\gamma + \delta x}{\sqrt{\psi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{\gamma + \delta y}{\sqrt{\psi(y)}} = v \quad ,$$

(1) Vedi il tomo 40 dei *Comptes Rendus*.

(2) Vedi più sotto ciò che si riferisce al sig. Rosenhain ed a Göpel.

dove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono costanti e $\psi(x)$ funzione intera come $\varphi(x)$ del quinto o sesto grado; egli pone come segue il problema della trasformazione. « Data essendo la funzione intera $\varphi(x)$, determinare i coefficienti di $\psi(x)$ e le costanti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in modo che le quindici funzioni $F(u, v)$ possano esprimersi razionalmente per mezzo delle quindici funzioni $f(u, v)$ ». La considerazione dei periodi, che le funzioni suddette devono possedere, lo conduce tosto a considerare sistemi di 4^2 numeri interi che devono soddisfare a certe condizioni. Collo studio aritmetico delle proprietà di questi sistemi e colle forme analitiche date dal sig. Rosenhain e da Göpel l'autore si pone in grado di intraprendere la teorica della trasformazione, della quale stabilisce due punti cardinali.

A queste ricerche va collegata la Nota *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (1), colla quale il sig. Brioschi determina i coefficienti dei polimoni omogenei somministranti le formole di trasformazione.

Dopo il primo lavoro del sig. Hermite, un nuovo passo, di capitale importanza per le nuove funzioni, si compie per opera di Göpel e del sig. Rosenhain. Essi giungono, l'uno all'insaputa dell'altro, a scoprire una effettiva espressione per le funzioni $\lambda(u, v)$ e $\lambda_1(u, v)$. La Memoria di Göpel compare nel 1847 nel giornale di Crelle (2); quella del sig. Rosenhain vien presentata nel 1846 all'Accademia di Parigi, premiata e pubblicata nel 1851 (3). Il punto di partenza dei loro lavori è lo stesso, ma non identica la via che battono. Essi non contemplano dapprima le due equazioni differenziali; ma, togliendo a modello la trattazione adottata in ultimo da Jacobi per la teorica delle funzioni ellittiche, riescono con felice divinazione a generalizzare opportunamente la legge di formazione della serie infinita

(1) *Comptes R.*, tomo 47 (1858), pag. 310.

(2) *Theoriae transcendentium Abelianarum primi ordinis adumbratio levis.* Tomo 35.

(3) *Mémoires sur les fonctions de deux variables á quatres périodes* nel tomo 11 dei *Mémoires présentes* . . . Vedi anche l' *Auszug mehrerer Schreiben an den Herrn Prof. C. G. J. Jacobi über die hyperelliptischen Transcendenten* nel tomo 40 del giorn. di Crelle.

esprimente la funzione jacobiana, e trovano, che con questa serie generalizzata (funzione delle due variabili *u* e *v*), si esprimono affatto semplicemente i coefficienti dell'equazione di secondo grado, le cui radici sono le funzioni: $\lambda(u,v)$ e $\lambda_1(u,v)$. Da questa serie si hanno propriamente sedici serie così naturalmente come quattro della serie jacobiana. I rapporti fra le sedici serie danno, oltre i coefficienti dell' equazione suddetta, ossia, oltre le due funzioni $\lambda+\lambda_1$ e $\lambda\lambda_1$, altre tredici funzioni, le quali dipendono in modo algebrico irrazionale dalle prime; ed il sistema di tutte e quindici tiene lo stesso posto nella teorica delle trascendenti iperellittiche di prim' ordine, come il sistema delle tre *sn u, cn u, dn u* nella teorica delle trascendenti ellittiche.

I risultati di Göpel sono appena fatti di pubblica ragione, e non ancora lo sono quelli del sig. Rosenhain, che in un programma ginnasiale (1) vengono annunziati risultamenti di ricerche molto più generali, risguardanti cioè le trascendenti iperellittiche, non del solo primo ordine, ma di un' ordine qualunque. Questa Memoria, colla quale il sig. Weierstrass veniva a mettersi fra i primi matematici del nostro tempo, aveva propriamente per iscopo speciale di far conoscere le relazioni fra gli integrali iperellittici (di ordine qualunque) *completi* di prima e seconda specie; relazioni analoghe a quella, che segnalammo di Legendre per gli integrali ellittici, e necessarie per lo studio e la rappresentazione analitica delle trascendenti su nominate (2). Una Memoria espressamente destinata a render noti i risultati, che nella teorica di queste trascendenti il sig. Weierstrass conseguiva, compare nel 1854 (3). La distesa trattazione però non viene in luce se non per una parte delle

(1) *Jahresbericht über das K. Kath. Gymnasium zu Braunsberg in dem Schuljahre* 1848-49. La Memoria porta il titolo di *Beitrag zur Theorie der Abel' schen Integrale.*

(2) In una Memoria, che si legge negli Annali di matem. del sig. Tortolini pel 1858 (pag. 12, il sig. Brioschi ottiene siffatte relazioni, e sotto la stessa forma e sotto forma differente, per via diversa da quella del sig. Weierstrass ed in sommo grado semplice e diretta.

(3) *Zur Theorie der Abel' schen Functionen. Giorn. di* Crelle, Tomo 47.

medesime in una Memoria del 1856 (1). Di questa diamo ora qualche notizia.

L' autore presenta il sistema jacobiano delle equazioni iperellittiche sotto la forma

$$du_1 = \tfrac{1}{2}\,\frac{P(x_1)}{x_1-a_1}\,\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \ldots + \tfrac{1}{2}\,\frac{P(x_\rho)}{x_\rho-a_1}\,\frac{dx_\rho}{\sqrt{R(x_\rho)}}\,,$$

$$\ldots\ldots\ldots\,,$$

$$du_\rho = \tfrac{1}{2}\,\frac{P(x_1)}{x_1-a_\rho}\,\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \ldots + \tfrac{1}{2}\,\frac{P(x_\rho)}{x_\rho-a_\rho}\,\frac{dx_\rho}{\sqrt{R(x_\rho)}}\,;$$

dove intende che siano

$$R(x) = A_0\,(x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_{2\rho+1})\,,$$
$$P(x) = (x-a_1)\,(x-a_2)\ldots(x-a_\rho)\,,$$

A_0 una costante, $a_1, a_2, \ldots a_{2\rho+1}$ pure delle costanti reali o complesse qualsiansi, ma tutte differenti tra loro; e dove stabilisce che le quantità $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ debbano prendere i valori $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ quando le variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ si annullino simultaneamente.

Ciò posto, il problema jacobiano d' inversione domanda che si trovino espressioni analitiche delle $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ per mezzo delle $u_1, u_2, \ldots u_\rho$. Però, come già si vide nel caso di $\rho = 2$, non sono propriamente le espressioni delle quantità $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$, ma piuttosto quelle delle funzioni simmetriche di dette quantità che convien di cercare. Imperocchè, come Jacobi aveva già dichiarato, siffatte funzioni simmetriche riescono funzioni delle $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ aventi un solo valore per ogni sistema di valori finiti delle variabili e sempre continue finchè restano finite. E pertanto il problema d' inversione potrà definirsi siccome il problema di trovare le espressioni dei coefficienti $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$ dell' equazione

$$x^\rho + P_1 x^{\rho-1} + P_2 x^{\rho-2} + \ldots + P_\rho = 0\,,$$

(1) *Theorie der Abel' schen Functionen. Giorn. di Crelle*, Tomo 52.

le cui radici debbano essere le funzioni $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$ determinate dalle su riferite equazioni differenziali.

Ma diciamo più particolarmente come mette la questione il sig. Weierstrass. Dopo aver detto della precedente equazione, aggiunge :

« . . . . una funzione intera di x del $(\rho - 1)^{esimo}$ grado

$$Q_1 x^{\rho-1} + Q_2 x^{\rho-2} + \ldots + Q_\rho ,$$

i cui coefficienti sono funzioni della stessa natura delle P_1, $P_2, \ldots, P_\rho$, dà i valori da applicarsi ai radicali

$$\sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots\ldots, \sqrt{R(x_\rho)},$$

mettendo in essa al posto di x ordinatamente $x_1, x_2, \ldots x_\rho$ »

« Quindi ogni espressione, composta in maniera razionale e simmetrica colle

$$x_1, x_2, \ldots, x_\rho \text{ e } \sqrt{R(x_1)}, \sqrt{R(x_2)}, \ldots, \sqrt{R(x_\rho)},$$

riesce funzione delle $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$ della natura delle $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$. Ed in particolare emerge, che il prodotto

$$(a_r - x_1)(a_r - x_2)\ldots\ldots(a_r - x_\rho),$$

dove r significa uno dei numeri $1, 2, \ldots, 2\rho + 1$, è il *quadrato* di una simile funzione. Se pertanto, ponendo

$$\varphi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_\rho)$$

e denotando con $h_1, h_2, \ldots, h_{2\rho+1}$ delle costanti, si considerano le quantità

$$\sqrt{h_1 \varphi(a_1)}, \sqrt{h_2 \varphi(a_2)}, \ldots, \sqrt{h_{2\rho+1} \varphi(a_{2\rho+1})}$$

come funzioni delle $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$: queste funzioni non solo danno agevolmente i coefficienti $P_1, P_2, \ldots, P_\rho$, ma si distinguono, al pari delle *ellittiche sen am u, cos am u, Δ am u,* alle quali riduconsi per $\rho = 1$ ed alle quali sono in generale perfettamente analoghe, per così fatto numero di proprietà rimarchevoli e feconde, che si è autorizzati a dare di preferenza ad esse, e ad una serie di altre con esse legate, il nome di *funzioni iperellittiche od abeliane,* e si è indotti a fare delle medesime l' oggetto principale della investigazione. »

« La prima questione, che ora si presenta, concerne la effettiva rappresentazione delle quantità testè definite, come pure lo svolgimento delle loro principali proprietà. Quindi si richiede anche di rappresentare l' integrale

$$\int \left\{ \frac{F(x_1)\,d\,x_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{F(x_2)\,d\,x_2}{\sqrt{R(x_2)}} + \dots + \frac{F(x_\rho)\,d\,x_\rho}{\sqrt{R(x_\rho)}} \right\},$$

dove $F(x)$ significa una funzione razionale qualunque di x, come funzione di $u_1, u_2, \dots, u_\rho$ ».

E quanto al metodo, diversamente da Göpel e dal sig. Rosenhain, l'autore dichiara « il mio studio fu sin dal principio diretto al ritrovamento di un metodo, che, per qualunque valore di ρ, potesse condurre immediatamente, per una via semplice e senza arbitrarietà, dalle precedenti equazioni differenziali alla rappresentazione delle quantità $x_1, x_2, \dots, x_\rho$ come funzioni di $u_1, u_2, \dots, u_\rho$, sotto forma valevole per tutti i valori di queste variabili. Perfezionando viepiù un procedimento, di cui già mi era valso con buon successo per sviluppare direttamente le funzioni ellittiche, senza presupporre le formole della moltiplicazione e trasformazione, mi venne fatto di raggiungere a pieno lo scopo prefissomi; e qui si presentò come risultato definitivo delle mie ricerche, che tutte le funzioni abeliane di un dato ordine riduconsi a dipendere da una sola trascendente, la quale può rappresentarsi sotto una forma semplice. Così è conseguito per esse funzioni ciò che Jacobi operò a riguardo delle funzioni ellittiche, e che Dirichlet, nel discorso commemorativo del grande matematico, a ragione designa come una delle sue maggiori scoperte » (1).

Alla trattazione, nei cui dettagli non dobbiamo qui entrare, può ascriversi il merito di essere affatto indipendente da ogni

(1) Come il nostro autore avvertiva (*Crelle*, tomo 47, pag. 298) i metodi di Göpel e del sig. Rosenhain non somministravano via opportuna per trattare eziandio le funzioni iperellittiche degli ordini successivi. Jacobi aveva già osservato che, estendendo senza restrizione di sorta la generalizzazione delle serie ϑ, operata con tanta perspicacia dai due suddetti analisti, a gradi di infinità superiori, ne risultavano serie troppo generali, vale a dire contenenti più costanti arbitrarie che non ne esistano nelle funzioni da rappresentarsi.

sussidio geometrico e di non esigere nel lettore una particolare preparazione. Il primo dei due capitoli componenti la Memoria può dirsi fabbricato puramente col teorema abeliano e colle proposizioni fondamentali della teorica delle serie. Ma come avvertimmo, questa trattazione per disteso rimase incompiuta. Quanto alla determinazione delle richieste espressioni delle funzioni abeliane, egli dimostra, ch' esse per valori qualunque delle variabili $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$, non eccedenti limiti finiti e prefissati (però grandi quanto si voglia) sono rappresentabili mediante quozienti di serie ordinate secondo le potenze intere e positive delle medesime; ma, per giungere all' effettivo ritrovamento di espressioni valevoli senza restrizione per qualsiasi sistema di valori delle $u_1, u_2, \ldots, u_\rho$, gli fa di bisogno un nuovo principio, col quale decidere, se una o più funzioni definite da una o più equazioni differenziali algebriche siano di quelle *aventi il carattere delle funzioni razionali fratte*, cioè esprimibili per quozienti di serie ordinate secondo le potenze intere e positive delle variabili e convergenti per tutti i valori finiti delle stesse. E pertanto prende a svolgere questo principio, per il caso di una sola funzione e di una sola equazione differenziale nel cominciamento del secondo capitolo; ma poi, innanzi di passare al caso delle funzioni abeliane, trova conveniente di mostrare l' utilità di tale principio per la rappresentazione delle funzioni ad un solo valore, applicandolo alle trascendenti ellittiche. E quindi dedica a queste tutto il resto del secondo capitolo; dichiarando infine, che il metodo seguito in queste di lui originali ed importanti elucubrazioni è in essenza quello stesso che seguirà per le funzioni abeliane. Ma rispetto a questi successivi sviluppi ed a ricerche ancora più vaste, concernenti cioè la inversione e gli altri problemi, non soltanto della teorica delle trascendenti iperellittiche, ma della teorica delle trascendenti abeliane le più generali non ci resta che ricordare le già fatte dichiarazioni circa la poca inclinazione del celebre matematico per la stampa.

In riguardo della teorica creata dal sig. Weierstrass per le trascendenti iperellittiche, faremo ancora notare che il sig.

Brioschi ne svolgeva alcune parti colla solita eleganza in una Memoria stampata negli Annali di matem. del sig. Tortolini pel 1858 (1).

Un' anno dopo la pubblicazione dell' ultima su riferita Memoria del prof. Weierstrass, e precisamente nel tomo 54 (1857) dello stesso giornale di Crelle-Borchardt, compare la Memoria parimenti intitolata *Theorie der Abel' schen Functionen* del prof. Riemann, nella quale è svolta la teorica delle trascendenti abeliane le più generali. Non tenteremo di qui significare come sia ordita questa famosa Memoria, che, insieme con altre produzioni di questo grande analista, verrà presa più tardi in maggiore considerazione; e quindi per ora accenneremo soltanto a questo, che nella seconda parte della medesima si trova la risoluzione del problema d' inversione jacobiano, inteso nella sua massima generalità, cioè relativo alla prima specie di integrali abeliani qualsiansi. Lo strumento analitico della risoluzione consiste nella serie ϑ, presa con quel grado di generalità che conviene alle funzioni da rappresentarsi. Questa parte della Memoria riemanniana presenta pertanto una teoria di siffatta particolare specie di funzioni ϑ. Non entrando nei dettagli di questa teoria e dell' ufficio della ϑ nell' intero campo delle trascendenti abeliane, ci terremo paghi di segnalare come fondamentale il teorema circa l' annullarsi di esse funzioni ϑ; di ripetere che l' ufficio loro nel detto campo è lo stesso della ϑ di Jacobi nel campo delle trascendenti ellittiche; e di esprimere infine il desiderio che la loro introduzione nella teorica delle trascendenti abeliane avesse a parere, anche nei modi di questo illustre autore, non arbitrarietà o divinazione, ma un passo necessariamente voluto od almeno naturalmente indicato dallo svolgersi della investigazione, come appunto il sig. Weierstrass mirò ad ottenere e vedemmo formulato nei brani che da lui poc' anzi abbiamo preso.

Porremo termine finalmente alla prima serie delle nostre *Notizie* coll' additare: la Memoria del sig. Königsberger, distinto

(1) *Sopra alcune proprietà delle funzioni abeliane.* Pag. 20 del N. 1.

allievo del prof. Weierstrass (1), *Ueber die Transformation der Abelschen Functionen erster Ordnung* (*Crelle*, tomo 64), che va considerata nella debita dipendenza dai lavori del suo maestro e dei sigg. Hermite (2) e Brioschi (3), e nella quale ricompajono, ottenuti per via delle relazioni fra le ϑ, anche risultati già altramente conseguiti dal sig. Richelot; e la Nota del sig. Gordan *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes R.* tomo 60). Per questi studi, relativi cioè a funzioni abeliane di un numero qualunque di variabili, vuol essere segnalata la Nota che le ricerche del sig. Hermite davano occasione al sig. Brioschi di comporre e pubblicare nel giorn. di Crelle (4). Questo illustre matematico, stabilendo chiarissimamente in tutta generalità, le nozioni d' algebra presentate dal sig. Hermite per il caso particolare delle funzioni abeliane di prim' ordine, preparava colla succinta sua Nota elementi algebrici di somma importanza per la teorica delle funzioni ϑ di un numero qualunque di variabili.

(1) Quanto alle pubblicazioni inspirate dai principi a dai metodi del prof. Riemann, fra le quali dovrebbero qui specialmente indicarsi quelle dovute ai signori Prym e Neumann, ne daremo notizia nella seconda serie, allorchè avremo parlato dei lavori propri del sig. Riemann in maniera un po' meglio adeguata.

(2) Ricerche citate del tomo 40 dei *Comptes R.*

(3) Nota citata del tomo 47 dei *Comptes R.*

(4) *Sur l' analogie entre une classe de déterminants d' ordre pair et les déterminants binaires.* Tomo 52 (1856).

SERIE SECONDA



In questa serie abbiamo, come fu detto, da indicare quei lavori che adempirono più specialmente l' ufficio di introdurre e dare infine il dovuto posto *nell' intero campo dell' analisi* alla considerazione degli imaginari. Noi ci contenteremo di cominciare con Gauss e Cauchy. Questi due grandi matematici furono dopo Eulero i principali propugnatori dell' uso e dell' importanza da doversi attribuire agli imaginari. Anteriormente a Cauchy ed a Gauss , non ostante le capitali scoperte d' Eulero , si vede gli imaginari insinuarsi, è vero, in quasi tutti i rami della matematica e prendere posto in quasi tutti i trattati; ma, piuttostochè riconosciuti siccome legittimi elementi della scienza , si vede che sono tollerati in forza dei preziosissimi vantaggi che segnatamente nell' algebra permettevano di conseguire. Ognuno sa che una teorica generale delle equazioni algebriche non sarebbesi potuta stabilire senza il loro intervento.

Le pagine, che nelle pubblicazioni di Gauss si trovano dedicate espressamente alla giustificazione ed ai modi d' introdurre gl' imaginari e come costanti e come variabili nell' analisi, sono di gran lunga meno numerose di quelle che si trovano nelle pubblicazioni di Cauchy. Ma si potrebbe in certo qual modo asserire che Gauss meditasse più profondamente sulla *natura* degli imaginari, avendone dichiarata la origine puramente aritmetica, e dato quindi come rappresentazione, e non già siccome quasi loro essenza, quel significato geometrico, per il quale ad

un' imaginario suol farsi corrispondere un punto di un piano. Le sue idee, che possono già ravvisarsi nella dissertazione inaugurale (*Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* 1799) e nella Memoria del 1822 premiata dall' Accademia di Copenaghen, vennero da lui comunicate nel 1831 all'Accademia di Gottinga (1). Seguendo lui, chiameremo d' ora innanzi, come oramai si suole dalla maggior parte degli analisti di Germania, *numeri complessi* quei che dapprima solevansi chiamare quantità o grandezze *imaginarie*, ed un tempo e quasi ancora adesso da taluno *impossibili* (2). Gauss si valse dei numeri complessi non solo nell' analisi algebrica e nella infinitesimale, ma è noto a tutti ch' egli fece fare un' immenso progresso alla teorica dei numeri coll' introdurvi i numeri complessi interi (3).

(1) Vedi *Göttinger gelehrte Anzeigen* 1831, 64 *Stück.*

(2) Chiameremo, ancora secondo Gausa, *unità imaginaria positiva ed unità imaginaria negativa*, ed indicheremo con $\pm i$, le due radici date da $\sqrt{-1}$; e *numero* (puramente) *imaginario* un numero della forma bi, b essendo reale. Di un numero complesso $a+bi$, a e b essendo reali, a verrà detta occorrendo la *parte reale*, bi la *parte imaginaria*. La espressione *numero complesso* trovasi per la prima volta usata da Gauss nella *Theor. resid. biquadr.* 30; il segno i nelle *Disquis. arithm.* 337.

La menzionata rappresentazione dei numeri complessi mediante i punti di un piano è concepita come segue. I punti rappresentativi dei numeri reali sono situati sopra una retta, ed invero i punti dei numeri positivi da una banda e i punti dei numeri negativi dalla banda opposta rispetto al punto dello zero (origine). I punti dei numeri complessi che hanno comune la parte reale a sono situati sopra la retta che sega ortogonalmente la prima nel punto del numero a.

(3) Gauss pure introdusse i numeri complessi nella teorica delle trascendenti ellittiche, scoprendo sin dalla fine del secolo scorso il principio della doppia periodicità. Le sue ricerche in questa teorica compariranno in uno dei volumi della raccolta completa de' suoi lavori, che per cura della R. Società delle scienze di Gottinga è in corso di stampa. Il perchè lo straordinario matematico non abbia dato egli stesso alla stampa sì importanti ricerche si può rilevare dalle seguenti righe di una sua risposta al Crelle, che lo aveva sollecitato di mandargli qualche cosa sulle funzioni ellittiche per il giornale. « Altre occupazioni mi impediscono per ora di redigere queste ricerche. Il sig. Abel mi ha prevenuto almeno d'un terzo. Si è avviato precisamente per la strada stessa d' onde io uscii nel 1798. Quindi non mi stupisco che, per la maggior parte ci sia giunto agli stessi risultati. Avendo messo d' altronde nella sua deduzione tanta sagacità, penetrazione ed eleganza, io mi credo per ciò stesso dispensato dalla redazione delle ricerche mie proprie. » (Vedi *Oeuvres Complètes de Abel*, *tome* I, *pag.* VII).

Cauchy apre alla scuola politecnica di Parigi e poscia dà alle stampe nel 1821 il famoso corso *d'Analyse algébrique*, dove mette le basi di quel lavoro, col quale, proseguendo con meravigliosa perseveranza per tutto il corso della sua vita, riuscì ad innovare quasi tutta l'analisi algebrica e contribuì largamente ad innovare l'analisi infinitesimale. Dappertutto Cauchy introduce a fondamento l'ampliata idea di numero, cioè l'idea di numero complesso, stabilisce definizioni precise e proscrive quei metodi, *il cui imperfetto rigore mal s' accorda colla vantata esattezza delle scienze matematiche.* De' suoi scritti noi presenteremo soltanto i punti più essenziali per il nostro intendimento. Una indicazione anche sommamente concisa di tutto ciò che l'analisi matematica deve a Cauchy eccederebbe, non che le esigenze del nostro scopo, anche d'assai le nostre forze. I suoi corsi di lezioni, i lavori comparsi sotto il titolo di *Exercices de Mathématiques* dal 1826 al 1830, quelli dal 1830 al 1835 a Torino ed a Praga, quelli comparsi come *Exercices d' Analyse et de Physique mathématique* colla data dal 1840 al 1847, i lavori contenuti nel giornale della scuola politecnica, ed i numerosissimi contenuti nelle pubblicazioni dell' Accademia delle scienze di Parigi somministrano, non ostante le molte ripetizioni, sì enorme copia di ricerche nuove ed importanti, che a farne un completo riassunto voglionsi forze ben' altre che mediocri.

Il corso *d' Analyse algébrique* rimase sempre il punto di partenza di Cauchy nei successivi lavori analitici, nei quali se ne vedono infatti citati o ripetuti frequentissimamente i brani. In esso, dopo d'avere dato una nuova definizione della continuità delle funzioni, d'aver risoluto fra altre questioni alcune relative alla determinazione di funzioni continue che debbano possedere date proprietà, d'aver esposto i fondamenti di una rigorosa teorica delle serie reali, passa a considerare i numeri complessi, che denomina *espressioni imaginarie.* E qui, determina come debbansi effettuare le operazioni di calcolo sulle medesime cioè sui numeri complessi, occupan-

dosi anche delle potenze di essi numeri d'esponente irrazionale, stabilisce il concetto di variabile complessa, espone gli elementi della teorica delle serie complesse, ed inizia lo studio delle funzioni di variabili complesse, investigando il significato da attribuirsi alle notazioni (1)

$$A^x, \text{ sen } x\ , \cos x$$

$$L\ x\ , \text{ arc sen } x\ , \text{ arc cos } x\ ,$$

quando la variabile x divenga complessa. Dà poi fra altre cose anche una dimostrazione del teorema fondamentale nella teorica delle equazioni algebriche, che esiste sempre una radice e quindi tante quant'è il grado (2).

Da questa classica opera non risulta *perfettamente* risoluta la questione fondamentale per la introduzione dei numeri complessi nell'analisi, di fissare il significato delle formole

$$a + b\ , a - b\ , a\,b\ , \frac{a}{b}\ , a^b\ , \text{Log}_b\ a\ ,$$

per tutti i casi possibili di valori reali o complessi delle lettere a e b. Ma su tale questione, come su altre pure importantissime, Cauchy ritorna replicatamente nei lavori successivi, per crescerne la generalità e viepiù accostarsi alla perfezione. Egli è in sommo grado interessante di seguire dettagliatamente le fasi del pensiero dell'operosissimo matematico in tutte le principali questioni relative ai numeri complessi ed alla teorica delle funzioni, che sovr' essi egli andò costruendo; siffatto studio può dirsi uno dei più efficaci per penetrare con sicurezza e rapidità nella intima cognizione dell'analisi. Esso educa ad un'esame libero e rigoroso dei principî da ammettere e dei mezzi da impiegare. Con esso si sale a quel punto di vista indipendente, da dove non avviene di credere l'algebra una cifra caduta dal cielo, ma la si riconosce, qual'è, un linguaggio

(1) Intendasi con A numero reale positivo e con L logaritmo a base A.

(2) Di questo teorema Gauss, come si sarà notato, dava una dimostrazione sino dal 1799. Più tardi ne dava altre tre, l'ultima delle quali nel 1849 (Vedi i *Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen* nel tomo 4 delle Memorie della R. Società delle Scienze di Göttingen).

creato a poco a poco dalla mente dell' uomo per esprimere con brevità concetti chiari e deduzioni rigorose; e da dove ben si vede tutto l' errore di coloro, che, invece di adattare il simbolo al pensiero, cercano evocare idee à spiegazione di segni, come se questi avessero preesistito con un significato intrinseco inviolabile.

Circa la natura dei numeri complessi, e nell' *Analyse alg.* e negli scritti posteriori, Cauchy non ne afferma come Gauss la necessaria origine nelle operazioni inverse dell' aritmetica. Nella *Analyse alg.* li considera come espressioni simboliche, cioè come *combinazioni di segni algebrici che nulla significano per se stesse ed alle quali si attribuisce un valore differente da quello che dovrebbero avere naturalmente*; e quindi considera le equazioni fra numeri complessi come *formole simboliche che prese letteralmente ed interpretate secondo le convenzioni generalmente ricevute sono inesatte e prive di senso, ma dalle quali si possono dedurre risultati esatti modificando ed alterando secondo regole fisse o queste formole od i simboli che contengono*. Nella Memoria *Sur la théorie des équivalences algébriques substituée à la théorie des imaginaires*, contenuta nel tomo 4 degli *Exerc. d' An. et de Phys. math.*, fa vedere come si possa ridurre il simbolo $\sqrt{-1}$ ad esprimere una quantità reale. E poco dopo, nella Memoria *Sur les quantités géométriques* contenuta nel tomo stesso, presenta il numero complesso come ente geometrico, risultante dalla lunghezza (*modulo* o *valor numerico*) e dalla inclinazione (*argomento* od *azimut*) di una retta rispetto ad altra retta fissa; la qual maniera vedesi mantenuta in numerosi articoli susseguenti.

Seguiamolo adesso nelle modificazioni e distinzioni, che andò introducendo nel concetto di funzione. La parola *funzione*, impiegata dai primi analisti per designare in generale le potenze di una stessa quantità, trovasi da Leibnitz e dai Bernoulli impiegata per designare una quantità esprimibile in qualsiasi maniera analitica per mezzo di un' altra quantità considerata come variabile indipendente. Questa definizione di funzione, tutta fondata sul concetto di una espressione analitica,

è pur quella tenuta da Eulero e da Lagrange. La introduzione della variabilità complessa non dà occasione a Cauchy nell' *Analyse alg.* di introdurre alcun cambiamento nella definizione di funzione: per funzione reale o complessa, di una variabile x reale o complessa, s' intende, nell' *Analyse alg.*, od una quantità w espressa esplicitamente mediante una formola contenente la lettera z, ovvero una quantità che dipende da z in forza di un sistema di equazioni contenenti le lettere z. w e tante altre pure rappresentatrici di variabili, oltre quelle rappresentatrici di costanti, quante sono le equazioni meno una. Però, se non la definizione di *funzione in generale*, v' è da mettere in rilievo nell' *Analyse alg.* la innovazione del concetto della *continuità nelle funzioni*, ossia lo stabilimento di questo concetto nel senso dipoi universalmente adottato. Il carattere della continuità vedesi cioè desunto dal modo di succedersi dei *valori* della funzione, e non dal modo con cui questa trovisi espressa analiticamente. Ecco come Cauchy medesimo in una pubblicazione posteriore (1) commenta questa innovazione. « Nelle opere di Eulero e di Lagrange, una funzione è chiamata *continua* o *discontinua*, secondochè i diversi valori di essa corrispondenti a diversi valori della variabile sono o non sono soggetti ad una medesima legge, sono o non sono forniti da una sola e medesima equazione. Egli è in questi termini che la continuità delle funzioni trovavasi definita da questi illustri geometri, allorchè dicevano *che le funzioni arbitrarie, introdotte dall' integrazione delle equazioni alle derivate parziali, possono essere funzioni continue o discontinue.* Tuttavia, siffatta definizione è lontana dall' offrire una precisione matematica; imperocchè, se i diversi valori di una funzione corrispondenti ai diversi valori d' una variabile dipendono da due o più equazioni distinte, nulla impedirà di diminuire il numero di queste equazioni, ed anche di surrogarvi un' unica equazione la cui decomposizione fornirebbe tutte le altre. V' ha di più: le leggi analitiche, alle quali

(1) *Mémoire sur les fonctions continues. Comptes Rendus*, tomo 18.

le funzioni possono essere assoggettate, trovansi generalmente espresse da formole algebriche o trascendenti, e può accadere che diverse formole rappresentino, per certi valori d' una variabile x, la stessa funzione, e per altri valori di x, delle funzioni differenti. Quindi, se si considera la definizione di Eulero e di Lagrange come applicabile ad ogni specie di funzioni, siano algebriche, siano trascendenti, un semplice cambiamento di notazione basterà sovente per trasformare una funzione continua in funzione discontinua, e reciprocamente. Così, per esempio, supposto x reale, una funzione che si riducesse ora a $+x$, ora a $-x$, secondochè x fosse positiva o negativa, dovrebbe per questo motivo annoverarsi tra le funzioni discontinue; eppure la stessa funzione potrà risguardarsi come continua quando sia rappresentata dall' integrale definito

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x^2\,dt}{t^2+x^2}$$

. . . . . . Dunque, il carattere di continuità nelle funzioni, considerato dal punto di vista al quale dapprima si misero i geometri, è un carattere vago ed indeterminato. Ma l' indeterminazione cesserà se alla definizione di Eulero si sostituisce quella da me data nel capitolo 2 dell' *Analyse alg.* Giusta la nuova definizione, una funzione della variabile reale x sarà *continua* fra due limiti a e b di essa variabile se entro questi limiti la funzione prende costantemente un solo valore finito e tale che un' incremento infinitamente piccolo della variabile produca sempre un' incremento infinitamente piccolo della funzione . . . . La continuità delle funzioni così definita è d' altronde un carattere la cui importanza si trova oggidì generalmente apprezzata dai geometri. Egli è col tener conto delle soluzioni od interruzioni osservate in questa specie di continuità, che io giunsi a determinare per le equazioni algebriche il numero delle radici soddisfacenti a date condizioni, per esempio, il numero delle radici il cui modulo sia compreso fra due limiti dati; ed è ancora questa specie di continuità

che forma, come ho dimostrato, il carattere distintivo delle funzioni sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze intere crescenti di una o più variabili . . . . ». Dopo queste dichiarazioni, potrà forse parere superfluo il far riflettere, come fosse naturale che Cauchy prendesse ad esaminare per rispetto alla continuità, intesa nel detto senso, le diverse specie di funzioni, ed anzitutto quelle più adoperate, e pubblicasse quindi importanti lavori sull' argomento (1). Questo concetto della continuità entra essenzialmente in maniera più o meno esplicita in gran parte delle investigazioni di Cauchy, e non poteva a meno di essere universalmente adottato e di provocare importanti ricerche anche da parte degli altri analisti, essendo esso precisamente il concetto suggerito dalle variazioni delle grandezze dello spazio e del tempo.

Ma passiamo alle altre osservazioni da farsi nella storia del concetto di funzione presso Cauchy. Nella Memoria *Sur les fonctions de variables imaginaires*, che può leggersi nel tomo 3 degli *Exerc. d' An. et de Phys. math.*, non si trova ancora alcuna modificazione del concetto di funzione d' una variabile complessa quale risulta dall' *Analyse alg.* Ma nel tomo 4 dei medesimi *Exercices*, in seguito alla Memoria *Sur les quantités géométriques*, e precisamente nell' articolo *Sur les fonctions des quantités géométriques*, s' incontra una nuova definizione. Ivi è detto « Allorchè, adottando i principi stabiliti negli articoli precedenti, si sostituisce alle *espressioni complesse* le *quantità geometriche*, le variabili complesse altro non sono che *quantità geometriche variabili.* Resta a sapere come debbano essere definite le *funzioni* di variabili complesse. Questa questione ha

(1) Citeremo come tale il *Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d' une équation qui renferme un paramètre variable* (nel tomo 2 degli *Ex. d' An. et de Phys. math.*), a cui in seguito verrà occasione di alludere. Considerando nel primo paragrafo di questa Memoria una equazione qualunque $F(u, z) = 0$ tra due variabili u e z, concepita come da risolversi rispetto ad u, Cauchy dimostra, che, per avere certezza che una qualsiasi delle radici, risguardata come funzione del parametro z, riesca continua in prossimità di un valor particolare z_0 di z, basta che $F(u, z)$ sia essa medesima funzione continua di u e z, in prossimità del valore z_0 di z e del valor corrispondente di u.

imbarazzato sovente i geometri ; ma ogni difficoltà scompare, qualora, lasciandosi guidare dall'analogia, si estendano alle funzioni di quantità geometriche le definizioni generalmente adottate per le funzioni di quantità algebriche (cioè reali). Si giunge per tal guisa a conclusioni singolari a primo aspetto, e pure affatto legittime, che indicherò in poche parole. Due variabili reali, o, in altri termini, due quantità algebriche variabili diconsi *funzioni* l'una dell'altra, quando variino simultaneamente in guisa che il valore di una determini il valore dell'altra. Se le due variabili suppongansi rappresentare le ascisse di due punti soggetti a muoversi sopra una medesima retta, la posizione di uno di questi punti determinerà la posizione dell'altro, e reciprocamente ». E quindi l'autore conchiude, che una quantita geometrica $w = u + vi$ dovrà risguardarsi come *funzione* di altra quantità geometrica variabile $z = x + yi$, ogniqualvolta il valore di z determini il valore di w; o più geometricamente, ogniqualvolta la posizione del punto z determini la posizione del punto w (1); per il che basterà *che u e v sieno funzioni determinate di x* ed y. Qui facciamo due riflessioni. Una si è, che questa definizione può intendersi come implicante puramente l'idea della dipendenza del valore di w da quello di z, e non di necessità l'idea di una espressione analitica per questa dipendenza. Sebbene Cauchy continuasse, direi tacitamente, ad ammettere il *substratum* di una espressione analitica nei propri scritti sulle funzioni, tuttavia si può scorgere nella esposta definizione quella tendenza che i progressi dell'analisi e della fisica matematica andavano producendo, di stabilire cioè i principi di una teorica generale delle funzioni indipendentemente dalla supposizione di espressioni analitiche. L'altra riflessione si è, che, pur volendo abbracciare esclusivamente espressioni analitiche, la nuova definizione è assai più generale della prima; imperocchè una quantità ot-

(1) A scanso d'equivoci e per brevità ci permettiamo, nel trascrivere i brani, di mutare qualche lettera, di dire complesso invece di imaginario, di scrivere i invece di $\sqrt{-1}$, e di designare colla medesima lettera il numero complesso ed il punto che lo rappresenta.

tenibile mediante operazioni di calcolo da eseguirsi sulle due variabili x e y non sarà, che in casi relativamente particolari, ottenibile mediante un sistema di operazioni di calcolo da eseguirsi sopra l' unica quantità composta $x+yi$. Siffatta generalizzazione, per la quale qualunque funzione di due variabili x e y può mettersi tra le funzioni di una sola variabile complessa $x+yi$, non è, come a suo luogo diffusamente spiegheremo, consigliata da vera profonda analogia; per essa la teorica delle funzioni di una variabile complessa sarebbe semplicemente la teorica delle funzioni di due variabili, e non avrebbe conseguito l' alto grado d' importanza che effettivamente giunse ad ottenere. Egli è perciò che Cauchy stesso, pur conservando la posta definizione di funziono d' una variabile complessa $x+yi$, trova necessario di introdurre un' epiteto per designare, fra tutte le funzioni comprendibili nella definizione, soltanto quelle le quali, al pari di tutte le funzioni risultanti dagli ordinari sistemi di operazioni di calcolo eseguite sulla combinazione $x+yi$, godano della proprietà di avere per ogni valore di $x+yi$ una derivata indipendente dal valore di $\frac{dy}{dx}$. L' epiteto che introduce è quello di *monogena* (monogène); e nelle proprie ricerche circa la teorica delle funzioni abbraccia esclusivamente le *funzioni monogene*. La condizione della monogeneità si traduce nell' equazione differenziale parziale

$$i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$$

ovvero nelle due in termini reali

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

d' onde si hanno queste altre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\ ,\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0\ .$$

Siffatte equazioni fanno comprendere a priori come sia possibile di stabilire proprietà precise ed importanti per le funzioni

di una variabile complessa, senz' altro presupporre delle medesime fuorchè la monogeneità (1).

Porremo fine a ciò che si riferisce in particolare al concetto di funzione ricordando, siccome adottati abbastanza generalmente dagli analisti, i due vocaboli *monodroma* (monodrome) e *sinettica* (synectique) pure introdotti da Cauchy per soddisfare viemeglio al bisogno cresciuto col moderno progresso di distinguere accuratamente i vari modi di comportarsi di una funzione. Imaginiamo che alla variabile z sia permesso soltanto di assumere valori rappresentati da punti compresi in una determinata porzione S del piano, o, detto più brevemente, che z debba rimanere entro S; se una funzione w di z prende sempre lo stesso valore in uno stesso punto di S, qualunque sia il cammino che z possa percorrere per arrivarvi, Cauchy dice che w è funzione monodroma di z in S. Dice poi, che una funzione è sinettica quando sia finita continua monogena e monodroma in tutto il piano, cioè per qualunque valor finito della variabile.

Il proposito di ricostruire l' edificio analitico sopra la nuova e più larga base della variabilità complessa doveva condurre presto Cauchy ad introdurre la medesima anche nella definizione di integrale. Ed infatti, quattro anni dopo la pubblicazione dell' *Analyse algébrique*, lo si vede sviluppare questa idea nella Memoria *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (Paris, Août 1825). Ivi si legge: « Per fissare general-

(1) Due degli articoli che si riferiscono al presente punto sono: quello *Sur les differentielles de quantités algébriques ou géométriques, et sur les dérivées des fonctions de ces quantités*, il quale trovasi col già citato (*Sur les fonct. des quant. géomètr.*) nello stesso tomo degli *Exercices*; e quello *Sur les fonctions de variables imaginaires*, il quale trovasi nei *Comptes Rendus* del 1 Sem. 1851. Ricordiamo però a questo proposito e per la interpretazione geometrica della monogeneità la già citata Memoria di Gauss premiata nel 1822, dall' Accad. di Copenaghen: *Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*; della quale fu pubblicata una traduzione italiana dal prof. Beltrami nel tomo 4 degli Annali del prof. Tortolini.

mente il significato della notazione

$$\int_{x_0}^{\mathbf{x}} f(x)\, dx \quad ,$$

x_0 ed $\mathbf{x}$ esprimendo quantità reali ed $f(x)$ una funzione reale o complessa (1) della variabile x, basta considerare l' integrale definito, rappresentato da questa notazione, come equivalente al limite o ad uno dei limiti verso cui converge la somma

$$(x_1-x_0)\, f(x_0)+(x_2-x_1) f(x_1)+ \ldots . +(\mathbf{x}-x_{n-1}) f(x_{n-1}),$$

allorchè gli elementi

$$x_1 - x_0 \;,\; x_2 - x_1 \;,\; \ldots\ldots ,\; \mathbf{x} - x_{n-1}$$

della differenza $\mathbf{x} - x_0$, ritenuti dello stesso segno di essa, ricevano valori numerici ognora più piccoli. Dunque, per abbracciare nella stessa definizione gli integrali presi fra limiti reali e quelli presi fra limiti complessi, conviene rappresentare colla notazione

$$\int_{x_0+y_0 i}^{\mathbf{x}+\mathbf{y}i} f(z)\, dz$$

il limite od uno dei limiti verso cui converge la somma

$$\begin{aligned} &[(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)\, i]\, f(x_0 + y_0\, i) \\ + &[(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)\, i]\, f(x_1 + y_1\, i) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + &[(\mathbf{x} - x_{n-1}) + (\mathbf{y} - y_{n-1})\, i]\, f(x_{n-1} + y_{n-1}\, i) \end{aligned}$$

allorchè, in ciascuna delle serie

$$x_0 \,,\, x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots\ldots ,\, \mathbf{x}$$
$$y_0 \,,\, y_1 \,,\, y_2 \,,\, \ldots\ldots ,\, \mathbf{y}$$

i termini, sempre crescenti o sempre decrescenti in grandezza dal primo all' ultimo, vadano avvicinandosi indefinitamente tra

(1) *Funzione complessa di una variabile reale x* è una quantità esprimibile con $\varphi(x) + i\,\psi(x)$, dove φ e ψ significhino funzioni reali di x; il che non va confuso con *funzione di una variabile complessa.*

loro aumentando perciò indefinitamente di numero ». La restrizione che Cauchy credette in questa Memoria di dover porre circa i termini delle precedenti due serie fu in seguito da lui medesimo abbandonata, e solo attesta che la estensione del concetto di integrale non era allora per anche concepita in tutta perfezione nella mente stessa di lui. Ciò spiega come talune immediate ed importantissime conseguenze di siffatta estensione, quale, per esempio, la doppia periodicità della funzione inversa dell' integrale ellittico di prima specie, non fossero da Cauchy a prima giunta avvertite. Abbandonata la restrizione circa i termini delle anzidette due serie, l' integrale

$$\int_{x_0+y_0i}^{x+yi} f(z)\,dz \qquad \text{ossia} \qquad \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$$

rimase definito come il limite verso cui tende la somma

$$(z_1-z_0)f(z_0)+(z_2-z_1)f(z_1)+\ldots.+(z-z_{n-1})f(z_{n-1})$$

allorchè le quantità o (giusta la rappresentazione geometrica) i punti

$$z_0, z_1, z_2, \ldots., z,$$

aumentando di numero per accostarsi indefinitamente l' uno al successivo, tendano a costituire una linea continua (curva qualunque) avente principio in z_0 e termine in z. Questa linea o, come d' ordinario diremo, il *cammino d' integrazione* può imaginarsi tracciato dal principio al termine prefissi in modo qualunque nel piano, e quindi a traverso qualunque parte di questo e con giri e rigiri quali e quanti si vogliano. Si viene pertanto a poter concepire una indefinita varietà di cammini d' integrazione; e per due dati limiti si possono quindi sempre concepire un' *integrale rettilineo*, che si ottiene facendo percorrere alla variabile il cammino rettilineo, ed una indefinita varietà di *integrali curvilinei*. Esposta la estensione del concetto di integrale, Cauchy risponde subito alla prima e più importante domanda che ne scaturisce, col dimostrare, che il valore

dell' integrale di $f(z)\,dz$, ove $f(z)$ sia funzione di z nel senso dell' *Analyse alg.* ossia funzione monogena di z secondo la definizione data più tardi, non cambia al cambiare del cammino di integrazione finchè questo non sorpassi certi punti singolari. Questa conseguenza della monogeneità costituisce una proposizione veramente cardinale nella nuova teorica delle funzioni. Obbligando la variabile di integrazione a rimanere entro opportune porzioni del piano, gli integrali concepiti nel nuovo più esteso senso potranno considerarsi, al pari degli integrali concepiti nel senso di prima, come dipendenti soltanto dai loro limiti, cioè dal principio e dal termine del cammino di integrazione. Il detto ampliamento del concetto di integrale, mentre permetteva immediatamente a Cauchy, nella Memoria stessa dell' Agosto 1825, di ottenere senza artifici un gran numero di formole opportune per valutare o trasformare gli integrali definiti, doveva produrre l' effetto ben più rilevante, di spianare quelle gravi difficoltà che si incontravano persino nei primi passi nel calcolo integrale; difficoltà che i lavori di Abel, di Jacobi e degli altri analisti pur lasciavano sussistere nella teorica delle funzioni ellittiche considerata come parte del calcolo infinitesimale, e che inevitabilmente sarebbonsi incontrate nell' analisi di qualunque funzione definita come integrale o funzione inversa di integrale, ossia, più in generale definita per mezzo di una equazione differenziale. Conoscendosi l' integrale indefinito $F(x)$ di una espressione differenziale $f(x)\,dx$, e la funzione $f(x)$ rimanendo continua e finita per tutti i valori reali di x da x_0 ad $\mathbf{x}$, si sa che l' integrale definito

$$\int_{x_0}^{\mathbf{x}} f(x)\,dx$$

è eguale alla differenza $F(\mathbf{x}) - F(x_0)$. Se la funzione $f(x)$ divenisse infinita per un valore a compreso fra x_0 ed $\mathbf{x}$, ma i due integrali definiti

$$\int_{x_0}^{a-\epsilon} f(x)\,dx \quad , \quad \int_{a+\epsilon'}^{\mathbf{x}} f(x)\,dx$$

tendessero verso limiti determinati col tendere di ε ed ε' verso zero: si rappresenterebbe la somma di questi due limiti ancora colla notazione

$$\int_{x_0}^{\mathbf{x}} f(x)\,dx \quad ,$$

e questa somma sarebbe ancora eguale alla differenza dei valori dell' integrale indefinito. Ma quando i due integrali non tendano verso limiti determinati, questa notazione non ha più senso dal punto di vista della variabile reale; eppure l' integrale indefinito darà ancora una differenza finita $F(\mathbf{x})-F(x_0)$. Che significa questa differenza? Se si permette alla variabile di assumere anche valori complessi, e che quindi si faccia percorrere alla medesima una curva nel piano, in modo da evitare il punto a dove la funzione $f(x)$ diventa infinita, e senza traversare certi altri punti dove possano presentarsi lo stesso o certi altri accidenti, l' integrale (curvilineo) che ne risulterà avrà un valore determinato, dato ancora precisamente dalla differenza dei valori dell' integrale indefinito. Anche non presentandosi tali accidenti nel corso della integrazione reale, se la espressione $F(\mathbf{x})-F(x_0)$ ammette più valori e la $f(x)$ invece un valor solo per ogni valore di x da x_0 ad $\mathbf{x}$, si dimanda cosa significhino i valori di $F(\mathbf{x}) - F(x_0)$ diversi dal valor unico che risulta per l' integrale

$$\int_{x_0}^{\mathbf{x}} f(x)\,dx$$

facendo percorrere ad x i valori reali da x_0 ad $\mathbf{x}$? Permettendo alla variabile di passare anche per valori complessi, i diversi valori di $F(\mathbf{x}) - F(x_0)$ esprimeranno di regola tutti i diversi risultati ottenibili con integrazioni curvilinee fra gli stessi limiti x_0 ed $\mathbf{x}$. L' integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} \, ,$$

per x reale, rimarrebbe affatto indeterminato anche ricorrendo all' equazione :

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim \left\{ \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\epsilon'}^{1} \frac{dx}{x} \right\}.$$

Ma se sarà concesso di far muovere la x affatto liberamente nel piano, si potrà evitare il valore $x=o$, e, passando da -1 a $+1$ di mano in mano per cammini differenti, si potranno ottenere tutti i valori ricavabili dalla formola

$$(2n+1)\pi i\ ,$$

col dare ad n tutti i valori numerici interi. I quali valori sono appunto quelli che nell' analisi algebrica soglionsi attribuire alla espressione

$$l(1) - l(-1)\ ,$$

differenza dei valori di $lx + C$, che suol risguardarsi come integrale indefinito di $\frac{dx}{x}$. La periodicità doppia (che nella inversione dell' integrale ellittico compariva dapprima come un fatto isolato ed avvolto da tenebre nell' origine sua) si presenta, insieme con la semplice e con altri infiniti gradi di periodicità, fra le più ovvie e chiare conseguenze della imaginata estensione del concetto di integrale. La funzione z della variabile w, definita da

$$\int_{1}^{z} \frac{dz}{z} = w\ ,$$

(il che è uno dei modi di definire la e^w) deve ammettere il periodo $2\pi i$; imperocchè, senza mutare i limiti dell' integrale, ma solamente innestando, per così dire, nel cammino di integrazione uno, due, . . , n, . . giri di più intorno al punto-zero, si fa variare (crescere o diminuire, secondo il senso di questi giri) il valore di w di una, due, . . , n, . . volte la co-

stante $2\pi i$. Così pure la funzione $z = sen\,w$, definita come inversa dell' integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = w\ ,$$

deve ammettere un periodo, e la funzione $z = sn\,w$, definita come inversa dell' integrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = w\ ,$$

ne deve ammettere due. Imperocchè, innestando in un primo cammino di integrazione un giro che comprenda i due punti $+1$ e -1, il valore del primo integrale varia della costante 2π ed il valore del secondo della costante $4K$ (giusta la solita notazione di Jacobi); e questo secondo integrale poi varia della costante $2iK'$, innestando nel cammino di integrazione un giro che abbracci i due punti $+1$ e $+\frac{1}{k}$. Però per quanto ovvie possano ora parere, queste ultime riflessioni non si trovano tosto fatte da Cauchy, nè dagli altri che certamente ebbero a leggere la Memoria dell' Agosto 1825. Per trovare accennata da Cauchy la generazione su indicata dei periodi dobbiamo portarci sino al 1846 (1). Questi cenni sui periodi fanno parte di quelle considerazioni sopra gli integrali estesi a contorni di superficie, che vanno segnalate all' attenzione, siccome offerenti i teoremi che presso Cauchy come presso il sig. Riemann costituiscono i fondamenti della teorica delle funzioni. Siffatti teoremi sono quelli che si riferiscono: ancora al non variare, sotto certe condizioni, il valore di un integrale mentre varia il contorno (cammino di integrazione) lungo il quale s' intende preso; all' essere un integrale preso lungo il contorno di una super-

(1) Si osservino i *Comptes Rendus* del secondo semestre di tal' anno (tomo 23).

ficie equivalente alla somma di integrali da prendersi lungo i contorni delle varie parti in cui piaccia di concepire divisa la superficie stessa ; ecc. Qui si trova anche , in particolare , il teorema, che l' integrale semplice

$$\int \left(P \frac{dx}{ds} + Q \frac{dy}{ds} \right) ds \,,$$

preso lungo il contorno di una superficie piana , nella quale P e Q sieno funzioni di x, y monodrome finite e continue , equivale all' integrale doppio

$$\int\int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx\, dy$$

esteso a tutti i punti della stessa superficie. E vedesi notato discendere immediatamente da esso , che , ove

$$P\,dx + Q\,dy$$

sia un differenziale esatto , l' integrale semplice è nullo (1).

Coi rimarchevoli lavori di Cauchy contenuti in questo tomo dei *Comptes R.* si collegano così naturalmente le importanti ricerche del sig. Puiseux sulle funzioni algebriche e loro integrali (2) (dove finalmente piglia ben dovuta parte la integrazione curvilinea) che noi siamo indotti a darne qui subito il cenno. La prima Memoria (tomo 15) è divisa in tre parti. Nella prima di esse (ricordando avere Cauchy dimostrato (3) che i diversi valori di w dati da un' equazione algebrica $f(w,z)=0$ variano in modo continuo con z; sì che, fissato qual valore di w abbiasi da ritenere corrispondente ad un dato valor iniziale di z, possano d' allora in poi concepirsi determinati dalla continuità i

(1) Questo teorema si può anche già vedere nella Memoria di Gauss, pubblicata nel 1840, sulle forze agenti in ragione inversa dei quadrati delle distanze, che in seguito più accuratamente indicheremo.

(2) *Recherches sur les fonctions algébriques.* G. di Liouville, tomo 15. *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques.* G. di Liouville , tomo 16. Queste Memorie diedero occasione a due rapporti di Cauchy che leggonsi nel tomo 32 dei *Comptes R.*

(3) Nella Memoria *Sur la nat. et les pr. des racines d'une eq.* ecc. , che citammo parlando della *continuità* ; nella qual Memoria però ricorderemo che Cauchy non contempla esclusivamente le equazioni algebriche.

lavori da ritenersi per w al variare continuo di z, sin quando w non divenga infinita od eguale ad altre radici dell'equazione) l'autore prende ad investigare l'influenza del cammino di z sul valor finale di w, cioè sul valore di w corrispondente ad un dato valor finale di z. Trova che il valor finale di w rimane lo stesso al deformarsi del cammino di z, finchè questo non oltrepassi nelle deformazioni alcun punto dove w divenga infinita od eguale ad altre radici dell' equazione. Considera poscia l' influenza del cammino di z sul valore dell' integrale $\int w\,dz$, dimostrando il teorema fondamentale, che già dicemmo dato subito da Cauchy nella Memoria dell' Agosto 1825, ed alcuni suoi corollari, che sono pure fra i teoremi già enunciati da Cauchy nel tomo 23 dei *Comptes R.* Ma questi teoremi prendono nella Memoria del sig. Puiseux una significazione più circostanziata e più feconda di conseguenze, in virtù della circostanziata cognizione che colle prime due parti della Memoria si ottiene circa la maniera di comportarsi di w al muoversi di z. Nella seconda parte della Memoria esamina che cosa avvenga del valor finale di w allorchè il cammino di z, deformandosi, sorpassi qualche punto a, dove w diventi infinita od eguale a qualche altra radice di $f(w, z)=0$. Facendo z un giro intorno ad un punto, fra i valori delle radici si effettua una sostituzione, che, se non è circolare, è sempre il prodotto di più sostituzioni circolari effettuate sopra radici differenti. Il sig. Puiseux somministra un metodo per determinare effettivamente qual prodotto di sostituzioni circolari spetti a qualsivoglia punto. Questo metodo fornisce inoltre le espressioni delle radici in serie ordinate secondo le potenze ascendenti di $z-a$ e convergenti entro il massimo cerchio descrivibile intorno ad a senz' abbracciare alcun' altro punto della stessa natura. Per gli esponenti di queste potenze ha luogo il notabile teorema, che, se μ esprime l' ordine della sostituzione circolare di cui la radice w fa parte rispetto al punto a, gli esponenti per la serie rappresentante w sono multipli interi di $\frac{1}{\mu}$. Ri-

prendendo la considerazione dei cammini di z, egli mostra come un cammino qualsiasi, che vada da un determinato punto iniziale ad uno finale arbitrario, possa concepirsi decomposto in un cammino particolare (che, per esempio, potrebbe ordinariamente supporsi il rettilineo) fra gli stessi punti ed in *contorni elementari* (cioè cammini ognuno dei quali parte dal punto iniziale e vi ritorna abbracciando uno fra i punti a) che compariranno zero, una o più volte secondo la forma del cammino qualsiasi. Da ciò deriva facilmente come determinare il valore che prenderà w dopo che z avrà percorso un cammino qualunque di cui sia data la *caratteristica*, cioè la composizione mediante il cammino particolare, ed i contorni su nominati. Nella terza parte della Memoria applica le cose precedenti alla ricerca di tutti i valori che può avere l'integrale $\int w\,dz$ da prendersi lungo un cammino qualunque dato per z. Siffatto integrale si decompone, corrispondentemente all'accennata decomposizione del cammino di z, in un'integrale particolare (qual sarebbe il rettilineo) ed in un certo numero di *integrali elementari*, cioè presi lungo i *contorni elementari*. Da qui emerge tosto l'idea dei *moduli di periodicità* (1); e l'autore determina i moduli di periodicità *distinti* che appartengono agli integrali di un'ampia classe di funzioni algebriche, comprendente come casi particolari quelli degli integrali ellittici ed iperellittici. Nella seconda Memoria (tomo 16) l'autore ha per iscopo di completare un punto cardinale riferentesi ai moduli di periodicità. Per raggiungerlo, dimostra l'insigne teorema, che, *se una funzione algebrica di z ha un solo valore, cioè riprende sempre lo stesso valore quando z ritorna ad uno stesso punto, essa è necesariamente razionale*; e da questo deduce, che, *se l'equazione $f(w,z)=0$ è irriducibile, facendo partire z da un punto o valor iniziale dato, si può prescriverle tal cammino che, ritornando essa al valor iniziale, una qualsivoglia fra le radici riesca a prendere con variazione continua il valore di quella che*

(1) La parola *periodo*, impiegata dal sig. Puiseux, preferiamo adoperarla in riguardo delle funzioni che siano effettivamente periodiche. Così diremmo che i moduli di periodicità di un'integrale sono i periodi della sua funzione inversa.

piaccia fra le altre. La Memoria termina colla esposizione di un modo di riconoscere se una equazione sia irriducibile, e di determinare, quando non lo sia, i gradi delle equazioni irriducibili nelle quali si decompone.

Ma ritorniamo ai lavori di Cauchy. Dicemmo che nell' *Analyse alg.* egli espose i fondamenti di una rigorosa teorica delle serie sì reali che complesse, iniziando con queste la teorica delle funzioni di variabili complesse. Or bene, la teorica delle serie continuò anche di poi ad essere argomento di preziose ricerche di Cauchy, arricchendosi di molti importantissimi risultati, e rimanendo sempre lo strumento principale della di lui teorica delle funzioni. Cauchy forma con Poisson, Gauss ed Abel (1) il gruppo degli analisti che più potentemente contribuirono a liberare la scienza dall' errore d' impiegare le serie senza previo accertamento di loro convergenza. Tutti sanno come Cauchy stabilisse, per decidere della convergenza, parecchie regole molto semplici e di estesissimo uso. Posteriormente alla pubblicazione dell' *Anal. alg.* studiando con speciale attenzione l' argomento dello sviluppo in serie delle funzioni, giunge a stabilire tanto per le funzioni esplicite che per le implicite, quali sono le radici delle equazioni algebriche o trascendenti in cui siavi qualche parametro che si risguarda come variabile, dei principi generali di grande importanza e di facile applicazione, per cui mezzo si può non solo dimostrare con rigore le formole e indicare le condizioni della loro sussistenza, ma determinare altresì dei limiti per gli errori che si commettono tenendo conto

(1) Vedasi di Abel la notevolissima Memoria sulla serie binomiale. *Œuvres complètes*, tom. 1, pag. 66. Ovvero *Crelle*, tomo 4.

In essa il grande matematico studia con un rigore pur troppo raro dapprima in simili questioni la serie binomiale, contemplando valori sì reali che complessi per le due lettere che vi entrano.

Circa l' impiego delle serie divergenti come espressioni di quantità determinate dice: *che per tal mezzo si può dimostrare tutto ciò che si vuole, l' impossibile del pari che il possibile.*

Avverte la troppa generalità nell' enunciato del teorema sulla continuità di una serie i cui singoli termini sieno funzioni di una stessa variabile, dato da Cauchy nell' *Analyse alg.* (pag. 131); ma di quest' opera dice: *che dev' essere letta da ogni analista che ami il rigore nelle ricerche matematiche.*

soltanto di un certo numero di termini, ossia trascurando i resti nelle serie. E del complesso delle regole stabilite a quest' ultimo intento piacquegli costituire un corpo, per così dire separato, di dottrina, un nuovo calcolo, cui diede il nome di *calcolo dei limiti*. I principi di questo calcolo trovansi esposti in Memorie litografate a Torino negli anni 1831, 1832, 1833 (1). Non entreremo in particolari; ma non dobbiamo ommettere di avvertire: essere qui che, tra le proposizioni fondamentali, si presenta quel teorema, al quale, per la somma sua importanza nella teorica delle funzioni, viene specialmente applicato il nome di *teorema di Cauchy* sulla sviluppabilità di una funzione in serie. Questo teorema può ora enunciarsi come segue: *Affinchè una funzione sia sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze intere e positive della variabile e convergente in un cerchio avente il centro nel punto-zero, è necessario e sufficiente che la funzione sia sinettica nel cerchio stesso* (2). Con siffatto teorema la sviluppabilità di una funzione secondo l' anzidetta legge o, ciò ch' è lo stesso, secondo la formola di Taylor o di Maclaurin si desume adunque da *proprietà* della funzione senza bisogno di *calcolare* i termini stessi della serie (3). Questo teo-

(1) La prima di queste Memorie litografate è un compendio della Memoria *Sur la Mécanique Céleste* presentata l' 11 Ottobre 1831 all' Accademia di Torino. Questo compendio, intitolato infatti *Résumé d' un Mémoire sur la Mécanique Céleste et sur un nouveau calcul appelé calcul des limites*, ed una parte della Memoria litografata nel 1832 possono anche vedersi nel tomo 2 degli *Ex. d' An. et de Phys. math.*, e più completamente e tradotti in italiano nel tomo 2 degli *Opuscoli matematici e fisici*, che stampavansi allora in Milano.

(2) È noto che simil cerchio vien chiamato *cerchio di convergenza*; ed è chiaro che in una precisa enunciazione del teorema non si può a meno di riferirsi al medesimo, in quanto che una serie dell' anzidetta natura necessariamente converge entro tutto un cerchio (di centro 0, e di raggio finito od infinito) e diverge dappertutto fuori.

(3) Le proprietà allora esplicitamente menzionate come necessarie e sufficienti, perchè una funzione fosse sviluppabile nella dichiarata maniera, furono ch' essa fosse *continua* e *finita*. Più tardi comparve, siccome astretta alle stesse condizioni, la derivata. La *monogeneità*, che figurò più tardi ancora nell' enunciato del teorema, era allora, come già avvertimmo, inchiusa nel concetto stesso di funzione. Il teorema è dedotto dalla famosa formola (pag. 10 del citato tomo degli *Opus. mat. e fis*)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x} - x}\, d\bar{p} \qquad (\bar{p} \text{ è l' org. di } \bar{x})$$

rema non sarebbesi potuto stabilire senza l' intervento della variabilità complessa. Consideriamo, per esempio, la funzione

$$\frac{1}{1+x^2},$$

di cui è notissimo lo sviluppo

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \text{ecc.}$$

Questa serie non è convergente per valori reali di x, se non siano compresi fra -1 e $+1$. Eppure quando x, sempre tenuta ad essere reale, sorpassa l' uno o l' altro di questi limiti, non si presenta nella funzione alcun accidente che avverta e spieghi la cessazione della convergenza della serie. Come funzione di variabile reale, la quantità $\frac{1}{1+x^2}$ non cessa di essere monodroma continua e finita. Se invece si lascierà ad x tutta la variabilità aritmeticamente possibile, cioè la complessa, emergerà che per $x = \pm i$ la funzione non è più finita. Il cerchio di convergenza della serie non può dunque avere un raggio maggiore del modulo di i, cioè dell' unità.

Cauchy non si applica soltanto allo studio delle serie esprimenti funzioni esplicite od implicite nel senso sopra dichiarato, egli prende eziandio a considerare le serie colle quali esprimere gli integrali delle equazioni differenziali. La prima sua pubblicazione su quest' argomento è del 1835 (1). Per dare un' idea di ciò che Cauchy mirava ad ottenere, riporteremo qualcuno de' brani, coi quali riassumeva egli stesso in varie occasioni parte dei risultati conseguiti e nella Memoria del 1835, ed in parecchie altre contenute nei *Comptes R.* del 1846, ed in quella del 1852 sull' applicazione del calcolo infinitesimale alla determinazione delle funzioni implicite.

che vedremo essere fondamentale e, più o meno leggermente modificata, invocarsi ad ogni tratto nella moderna teoria delle funzioni. Tuttavia il pregio di essa, di prestarsi ad uno studio delle funzioni indipendente da ogni supposizione a priori di espressioni analitiche, non doveva essere valutato che assai più tardi e non trattenere quindi Cauchy dal dimostrare anche altramente il proprio teorema.

(1) È una Memoria litografata a Praga e riprodotta nel tomo I (pag. 327) degli *Exerc. d' An. et de Phys. math.*

« Essendo assai poco considerabile il numero delle equazioni differenziali che si possano integrare in termini finiti, si è tentato da lungo tempo di integrare esse equazioni per serie. Così, per esempio, essendo data una equazione differenziale di prim' ordine fra la variabile t ed una funzione incognita di t rappresentata da x, col valor particolare ξ della funzione x corrispondente al valor particolare τ della variabile t, si suppose la funzione x sviluppata secondo la formola di Taylor in una serie ordinata secondo le potenze intere crescenti di $t-\tau$; e, giacchè si giungeva facilmente a determinare i coefficienti delle varie potenze di $t-\tau$ in questa serie, deducendoli dai valori noti τ e ξ mediante l' equazione data e le sue derivate dei diversi ordini, e lasciando d'altronde arbitraria la costante ξ, se ne conchiuse che qualunque equazione differenziale del primo ordine fra x e t ammetteva un' integrale generale, e che questo integrale si trovava rappresentato dalla serie di Taylor, cioè dalla somma di questa serie, in cui i coefficienti venissero determinati, come ora si è spiegato, in funzione di τ e della costante arbitraria ξ. Tuttavia, le considerazioni precedenti non davano la certezza che si fosse integrata effettivamente l'equazione proposta, e nemmeno che quest' equazione ammettesse un' integrale. Imperocchè, da un lato, non si dimostrava in generale che la serie ottenuta fosse convergente, e si sa che le serie divergenti non hanno somme; dall' altro lato, una serie anche convergente, che proviene dallo sviluppo di una funzione effettuato mediante la formola di Taylor, non sempre rappresenta la funzione di cui si tratta. L' integrazione per serie poteva dunque essere illusoria. Per trasformare questa integrazione in un metodo esatto e rigoroso era necessario esaminare sotto quali condizioni e fra quali limiti le serie trovate fossero convergenti. Queste due questioni furono trattate nelle Memorie su menzionate; e nell' ultima delle medesime le conclusioni a cui giunse l' autore trovansi espresse come segue :

Con ognuna delle lettere

$$T\,,\,X\,,\,Y\,,\,Z\,,\,\ldots\,.$$

rappresentiamo una funzione delle variabili

$$t\,,\,x\,,\,y\,,\,z\,,\,\ldots\,.\,,$$

che rimanga finita monodroma e monogena in prossimità dei valori

$$\tau\,,\,\xi\,,\,\eta\,,\,\zeta\,,\,\ldots\,.$$

attribuiti a

$$t\,,\,x\,,\,y\,,\,z\,,\,\ldots\,.\,;$$

ed imaginiamo che x , y , z , ... *si assoggettino alla doppia condizione di verificare, qualunque sia* t , *le equazioni differenziali comprese nella formola*

$$\frac{dt}{T}=\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z}=\ldots\,.\,,$$

e di ridursi a ξ , η , ζ , ... *per* $t=\tau$. *Se* T *non si annulla facendo*

$$t=\tau\,,\;x=\xi\,,\;y=\eta\,,\;z=\zeta\,,\,\ldots\,.\,;$$

allora si proverà , mediante i teoremi stabiliti nella Memoria del 1835, *che è possibile di soddisfare, almeno finchè il modulo di* $t-\tau$ *non oltrepassa un certo limite , alle due condizioni enunciate , con valori di* x , y , z , . . . *sviluppati in serie convergenti, e rappresentanti gli integrali generali delle equazioni differenziali date. V' ha di più : si può affermare che, nell' ipotesi ammessa, questi integrali generali saranno i soli valori di* x , y , z , . . . *che variando con* t *per gradi insensibili adempiranno , per un modulo di* $t-\tau$ *bastantemente piccolo, le due condizioni enunciate. Finalmente, siccome i vari termini delle serie ottenute saranno funzioni monodrome monogene e finite della variabile* t , *si potrà affermare altrettanto dei valori trovati per le variabili* x , y , z , . . . *od anche di una funzione monodroma monogena e finita di queste variabili* ».

« Aggiungiamo che le serie, di cui qui si tratta , non riduconsi a serie ordinate secondo le potenze crescenti della differenza $t-\tau$ fuorchè nel caso particolare in cui le funzioni $T, X, Y, Z, \ldots$ divengano indipendenti dalla variabile t. Quando

queste funzioni contengono la variabile t, i diversi termini delle serie ottenute, cessando di essere proporzionali alle diverse potenze di $t-\tau$, vengono dati da integrazioni successive, e, quindi, possono rivestire forme meglio adatte alla soluzione dei problemi. Così, per esempio, in astronomia, si ottengono più d'ordinario serie ordinate, non secondo le potenze crescenti del tempo, ma, ciò che è preferibile, secondo i seni e coseni dei multipli di certi archi proporzionali al tempo ».

« Infine l'autore della Memoria del 1835 non si è ristretto a stabilire, nell'ipotesi ammessa, l'esistenza degli integrali generali di un sistema d'equazioni differenziali. Egli ha fissato altresì dei limiti entro i quali il modulo di $t-\tau$ può variare senza che le serie ottenute cessino di essere convergenti, e dei limiti superiori degli errori che si commettono troncando ciascuna delle serie ottenute ad un certo termine »(1).

Nel brano riportato sono contemplati valori sì reali che complessi delle variabili che vi entrano. A riguardo, in particolar modo, della variabilità complessa faremo ora notare che nella sua vera generalità essa venne introdotta da Cauchy in quest'argomento nel 1846. Ecco in quali termini il grande matematico presentava per la prima volta all'Accademia delle Scienze di Parigi le disquizioni che a ciò si riferiscono (2).

« Sono noti gli importanti servigi che prestano i numeri complessi non soltanto nella risoluzione delle equazioni algebriche o trascendenti, ma eziandio in moltissimi altri problemi... Era dunque naturale di pensare che, nella teorica dell'integrazione delle equazioni differenziali, dovessero scaturire risultati nuovi ed inattesi dalla considerazione diretta degli integrali complessi, non limitata ad alcuni casi particolari già trattati

(1) Quanto abbiamo riferito può precisamente riscontrarsi nelle pagine 557 - 559 del tomo 40 dei *Comptes R.*

(2) Vedi *Mémoire sur les intégrales imaginaires des équations différentielles, et sur les grands avantages que l'on peut retirer de la considération de ces intégrales, soit pour établir des formules nouvelles, soit pour éclaircir des difficultés qui n'avaient pas été jusqu'ici complètement résolues.* Comptes Rendus del 2 sem. 1846, pag. 563.

dai geometri, ma estesa a tutti i casi possibili. Ciò è quanto infatti avviene. Avendo rivolto le mie investigazioni verso questa parte, giunsi non soltanto a portare la luce in questioni delicate non ancora bastantemente chiarite, ma a stabilire altresì nuovi teoremi che, a motivo della loro generalità, mi sembrano degni d'attenzione. Prima di indicarli, credo utile, per farmi chiaramente comprendere, di fissar bene il senso delle espressioni di cui in seguito mi servirò, e di dire con precisione cosa intenda per integrali particolari o generali, reali od anche complessi, di un dato sistema di equazioni differenziali ».

« Come osservai nelle lezioni tenute alla Scuola Politecnica, un sistema qualunque di equazioni differenziali può sempre ridursi ad un sistema di equazioni differenziali del primo ordine. Inoltre, essendo date n equazioni differenziali del primo ordine fra $n+1$ variabili

$$x, y, z, \ldots, t,$$

si potrà sempre considerare una delle variabili, t, come indipendente, e le derivate delle altre come determinate dal sistema delle date equazioni, in funzioni esplicite od almeno implicite di $x, y, z, \ldots, t$. Di più, la cognizione di queste ultime funzioni non darà il mezzo di fissare completamente i valori generali delle variabili dipendenti $x, y, z, \ldots$; e, affinchè la integrazione delle date equazioni differenziali si riduca a problema determinato, bisognerà altresì obbligare le $x, y, z, \ldots$ a prendere certi valori iniziali

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots$$

reali o complessi, per un certo valore iniziale τ della variabile indipendente t. Quando questi valori iniziali sieno conosciuti insieme colle anzidette funzioni di $x, y, z, \ldots, t$, i valori generali di $x, y, z, \ldots$ saranno di regola totalmente determinati, vale a dire, ad un valore reale o complesso della t corrisponderanno generalmente valori determinati reali o complessi delle altre variabili. Questi valori saranno dati, o da

equazioni algebriche o trascendenti, se le equazioni differenziali siano integrabili in termini finiti, o da sviluppi in serie, ovvero anche saranno i limiti verso i quali convergeranno i risultati approssimativi dedotti dal metodo che esposi nelle mie lezioni alla Scuola Politecnica e che offre il vantaggio di essere sempre applicabile qualunque sia la forma delle equazioni differenziali. In tutti i casi, le formole che somministreranno i valori delle $x, y, z, \ldots$ rappresenteranno un sistema di integrali particolari delle equazioni differenziali proposte, se si attribuiranno ai valori iniziali $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ valori determinati; ed il sistema degli integrali generali, se si risguarderanno i valori iniziali come costanti arbitrarie. Così, il problema della integrazione di un sistema di equazioni differenziali si riduce, in realtà, alla ricerca d' un sistema qualunque di integrali particolari di queste equazioni. Gli integrali generali altro non sono che formole generali che comprendono ed abbracciano tutti gli integrali particolari, e se questi non possono tutti racchiudersi in un solo sistema di formole generali, bisognerà conoscere i diversi sistemi di formole generali racchiudenti diversi sistemi di integrali particolari, perchè gli integrali generali si possano ritenere come pienamente conosciuti. Se un' integrale particolare fosse isolato in guisa da non potersi comprendere con altri in una stessa formola generale, esso sarebbe del genere di integrali chiamati soluzioni particolari o integrali singolari delle equazioni differenziali ».

« Per ciò che si è detto, integrare n equazioni differenziali fra $n+1$ variabili significa semplicemente passare da un sistema dato di valori di queste variabili ad un altro sistema, prendendo una delle variabili per indipendente. Chiamando, come dianzi,

$$x, y, z, \ldots, t$$

le diverse variabili, e

$$\xi, \eta, \zeta, \ldots, \tau$$

i loro valori iniziali, t essendo la variabile indipendente, le

differenze $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\zeta$, ... sono *veri integrali definiti* presi rispetto a t a partire dall'origine τ, nei quali le funzioni sotto il segno $\int$ sono funzioni delle diverse variabili risguardate, come funzioni implicite di t. Tali differenze saranno generalmente della natura delle trascendenti che ho considerato nella mia Memoria intorno agli integrali definiti presi fra limiti complessi, poichè si possono supporre non solo complesse le funzioni sotto il segno $\int$, ma complessi eziandio i valori iniziale e finale della t. Questi integrali poi potranno, in tutti i casi, essere determinati, ed anche in più maniere, con esattezza grande quanto piacerà, sia mediante sviluppi in serie, sia col soccorso del metodo di integrazione precedentemente ricordato. Per far meglio intendere ciò che voglio dire a questo riguardo, e dipingere in certo qual modo agli occhi l'andamento del calcolo, ne darò una interpretazione geometrica ».

E qui Cauchy espone la solita rappresentazione geometrica dei valori della variabile indipendente t mediante i punti di un piano orizzontale, e fa notare: che il valore di $x-\xi$ sarà dato da un' integrale preso lungo un cammino, in esso piano, avente principio in τ e termine in t; che il valore di questo integrale per lo più non varierà al variare del cammino di integrazione; che potrà però anche variare, e che, per non lasciar nulla di arbitrario nella determinazione degli integrali di un sistema di equazioni differenziali, conviene fissare la natura del cammino di integrazione.

Col brano riferito dapprima volemmo far comprendere come Cauchy mirasse a trasformare in una teorica veramente rigorosa la integrazione per serie delle equazioni differenziali. Col brano invece da ultimo riferito, mettendo in tutta luce come abbia egli stesso (ciò che d' altronde era ben naturale) introdotta la variabilità complessa anche nello studio delle equazioni differenziali, abbiamo voluto far sì che possa ora parer giusto il collocare, che noi facciamo, nei lavori di Cauchy la origine di quel metodo di investigare gli integrali delle equazioni differenziali che, differendo affatto dal metodo di ridurre

le equazioni alle quadrature, crediamo di poter qualificare come moderno. Di questo metodo, come in oggi trovasi sviluppato vogliamo dar subito una succinta idea generale.

La variabilità complessa introdotta nello studio delle funzioni andò a poco a poco insegnando che, in generale, le funzioni (monogene) riescono determinate quando si conosca il loro modo di comportarsi intorno ai punti singolari, cioè intorno a quei punti del piano della variabile indipendente dove manchino per esse o la monodromia o la continuità. E pertanto, il problema di integrare una data equazione differenziale tra una funzione incognita x ed una variabile indipendente t, ossia il problema di determinare la funzione incognita x, potè essere ridotto alla ricerca, mediante la equazione differenziale, dei punti singolari per la funzione da essa definita e del modo con cui intorno ai medesimi la funzione si comporti (1). Simile ricerca non provoca tentativi vaghi che, non riuscendo, lascino ancora tutta la incertezza di prima, ma provoca l' applicazione di procedimenti uniformi e ben definiti, che conducono infallibilmente a qualche conclusione.

I lavori di Cauchy dove questo metodo comincia chiaramente a manifestarsi nella propria applicazione appartengono all' anno 1855 (2). Ma non entreremo in particolari circa i medesimi, reputando di aver detto abbastanza a riguardo di Cauchy su questo punto coll' avere rappresentato il nuovo metodo come traente origine dai lavori di lui.

Gli analisti, dai quali dopo Cauchy devesi riconoscere il maggiore progresso nello studio, inteso nel detto senso, delle equazioni differenziali, sono i sigg. Briot e Bouquet, Weierstrass, Riemann.

(1) Di tale maniera sparisce ogni essenziale diversità fra lo studio di funzioni definite da equazioni differenziali e lo studio di funzioni che trovinsi rappresentate da quadrature. In questo senso le *Recherches*, per esempio, *sur les fonctions algébriques* del sig. Puiseux possono considerarsi come un primo capitolo dello studio delle funzioni definite da equazioni differenziali. E noi cogliamo volontieri anche questa occasione per far riflettere sempre meglio come un lavoro possa giudicarsi adatto a veri luoghi, e per disporre quindi sempre più all' indulgenze per tutta, in genere, la distribuzione delle nostre *Notizie*.

(2) Vedi il tomo 40 dei *Comptes R.*

I sigg. Briot e Bouquet vanno considerati, insieme col sig. Puiseux, siccome que' matematici i quali maggiormente contribuirono a diffondere i principi ed i metodi ed a crescere i risultati delle dottrine di Cauchy riferentesi al campo scientifico al quale il nostro corso s' indirizza. I sigg. Briot e Bouquet presentarono all' Accademia delle Scienze di Parigi la Memoria *Recherches sur les propriétés des fonctions définies par des équations différentielles* nell' Agosto 1854 e la Memoria *Sur l' intégration des équations différentielles au moyen des fonctions elliptiques* nel Dicembre 1855; le quali vennero poi stampate nel 36 *Cahier* del giorn. della scuola politecnica, ed in gran parte anche nell' opera *Théorie des fonctions doublement périodiques*, che gli stessi diedero alla luce nel 1859, e di cui riferiremo più specialmente in seguito (1). Qui daremo un' idea di ciò che somministrarono nelle dette due Memorie, riportando i sunti che essi medesimi ne hanno fatto e che veggonsi premessi alle Memorie stesse.

Ecco il sunto della prima. « I casi in cui si può integrare un' equazione differenziale sono estremamente rari e vanno riguardati come eccezioni. Ma si può considerare un' equazione differenziale come definizione di una funzione, e proporsi di studiare le proprietà di questa funzione sull' equazione differenziale medesima ».

(1) Questi distinti matematici caddero in errori che nei luoghi opportuni delle nostre lezioni riconosceremo con tutta facilità e chiarezza: ma non crediamo conveniente di farne oggetto di considerazione in queste brevi *Notizie*. Del resto vogliamo sin d' ora dichiararci più che d' accordo col sig. Bertrand, il quale, presentando all' Accademia una più recente opera del sig. Briot (*Essais sur la Théorie mathématique de la Lumière*), ebbe a dire di quella del 1859 che *divenuto classico nelle alte regioni della scienza ha reso servigi ogni giorno più apprezzati.*

Gli stessi autori presentarono all' Accademia una Memoria anche nella seduta del 13 Febbrajo 1855, dandone un' estratto nel relativo *Compte R.*; ma i risultati ottenuti nella medesima si deducono immediatamente dai principi stabiliti in quella del successivo Dicembre.

Nel *Comptes R.* del 1 Sem. 1855 (pag. 357) e del 2 Sem. 1856 (pag. 26) possono leggersi i rapporti che le Commissioni, delle quali Cauchy era relatore, presentavano all' Accademia intorno alle due Memorie dei sigg. Briot e Bouquet. Ci piace citare le seguenti parole conclusive del secondo rapporto: » *i Commissari pensano che i risultati ottenuti dai sigg. Briot e Bouquet costituiscono un vero progresso nell' alta analisi* ».

Sia

$$\frac{dw}{dz} = f(w, z)$$

una equazione differenziale del prim' ordine ; w sarà una funzione di z, definita dalla condizione di soddisfare l' equazione differenziale e di ammettere un valor iniziale w_0 per $z=z_0$. Il sig. Cauchy ha dimostrato che, se il coefficiente differenziale $f(w, z)$ è funzione finita continua monodroma e monogena per i valori di w e z prossimi a w_0 e z_0, la funzione integrale w è del pari finita continua monodroma e monogena per i valori di z prossimi a z_0. Noi diamo una dimostrazione più semplice di questo teorema dell' illustre matematico, che è il nostro punto di partenza ».

« Pertanto, allontanandosi z dal punto iniziale z_0 secondo un cammino qualunque, la funzione integrale w, sino a quando il coefficiente differenziale possiede le proprietà su indicate, si conserva finita continua e monodroma; ma, se si giunge ad un punto z_1 dove il coefficiente differenziale diventi infinito ovvero prenda la forma $\frac{0}{0}$, ovvero cessi di essere monodromo, la funzione integrale subisce intorno a questo punto modificazioni ed acquista proprietà speciali che trasmettonsi di poi per tutta l' estensione del piano. Ci siamo proposto di studiare siffatte circostanze, che caratterizzano le diverse funzioni e le classificano in categorie ».

« Supponiamo che per $z=z_1$ e $w=w_1$ (w_1 essendo il valore di w corrispondente al valor z_1 di z) il coefficiente differenziale diventi infinito, in guisa però che il suo inverso $\frac{1}{f(w,z)}$ rimanga finito e continuo. Designando con m l' ordine della prima derivata parziale di $\frac{1}{f}$ rispetto a w che non si annulla, noi dimostriamo che, girando z intorno a z_1, la funzione integrale w cessa d' essere monodroma e prende $m+1$ valori differenti che si permutano gli uni negli altri in serie circolare ».

« Supponiamo ora che il coefficiente differenziale si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$ Ciò ha luogo quando il medesimo sia il quoziente di due funzioni φ e ψ che si annullino simultaneamente per $z = z_1$ e $w = w_1$. Ponendo

$$z = z_1 + z' \quad , \quad w = w_1 + w' \ ,$$

l' equazione differenziale diviene

$$\psi(w', z') \frac{dw'}{dz'} - \varphi(w', z') = . \ 0$$

Dopo aver spiegato i diversi modi di formare il gruppo dei termini di grado più basso nell' equazione, noi poniamo

$$z' = t^q \quad , \quad w' = (\mathbf{w}_0 + \mathbf{w}) t^p \ ,$$

(essendo p e q due numeri interi corrispondenti al gruppo che s' intende considerare, e $\mathbf{w}_0$ radice d' una equazione algebrica) e riduciamo l' equazione differenziale alla forma semplice

$$(\beta) \qquad \frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{a\mathbf{w} + bt + c\mathbf{w}^2 + \dots}{t} \quad ».$$

« Le proprietà della equazione (β) dipendono principalmente dal coefficiente a della prima potenza di $\mathbf{w}$ nello sviluppo del numeratore. Noi dimostriamo da prima che, quando a non sia intero positivo, l' equazione (β) ammette un' integrale monodromo che si annulla con t ».

« Se la parte reale di a è positiva, l' equazione differenziale ammette inoltre una infinità di altri integrali non monodromi, e tali, che ciascun d' essi prende una infinità di valori differenti quando t gira intorno al punto $t=0$ ».

« Quando a sia intero positivo, si può, con opportuna trasformazione, ridurre l' equazione al caso in cui a eguagli l' unità. Nel caso di $a=1$, se b è diverso da zero, l' equazione non ammette alcun integrale monodromo, ma una infinità di altri non monodromi, ciascuno dei quali prende una infinità di valori differenti quando t gira intorno a $t=0$. Se $b=0$, mentre $a=1$, l' equazione ammette una infinità di integrali monodromi ».

« Dopo aver studiato di tal guisa ognuna delle equazioni differenziali della forma (β) date dai diversi modi di aggruppamento e dalle radici dell' equazione algebrica che a ciascuna di essi corrisponde, è facile ritornare alla funzione w. Una funzione monodroma $\mathbf{w}$ di t dà una funzione w di t avente q valori in ogni punto (nel caso di $q=1$, w è quindi pure monodroma). Così si ottengono tutte le funzioni che soddisfanno l' equazione differenziale proposta e riduconsi a w_1 per $z=z_1$ ».

« Da ciò che precede risulta una conseguenza assai notevole, vale a dire che una funzione potrebbe non essere completamente definita assoggettandola a soddisfare una equazione differenziale del primo ordine ed a prendere un dato valore iniziale w_1 per $z=z_1$. Ciò accade, in generale, quando il coefficiente differenziale si presenti sotto la forma $\frac{0}{0}$ per $z=z_1$ e $w=w_1$; imperocchè abbiamo visto che, in tal caso, l' equazione differenziale ammette, generalmente, parecchi integrali riducentisi a w_1 per $z=z_1$. Sovente essa ne ammette anche una infinità, ed allora s' introduce nella integrazione una costante arbitraria, sebbene venga dato il valor iniziale ».

« In seguito esaminiamo il caso in cui il coefficiente differenziale, che indichiamo con W, sia funzione implicita definita da un' equazione algebrica

$$F(z, w, W)=o \quad ».$$

« Finchè W rimane radice semplice di quest' equazione, essa è funzione monodroma di z e di w; si rientra nel caso generale e la funzione integrale w è monodroma ».

« Se W diviene radice multipla d' ordine n, la funzione w cessa, in generale, d' essere monodroma, ed ammette n valori distinti che si permutano in serie circolare. Ma qualche volta la questione è molto più complicata, ed è necessario di ricorrere a trasformazioni che riconducano l' equazione differenziale alla forma (β) precedentemente studiata ».

« Abbiamo applicato a numerosi esempi la teorica di cui qui indicammo i tratti principali, onde mettere in evidenza le

proprietà tanto svariate delle funzioni definite dalle equazioni differenziali. Citeremo specialmente equazioni differenziali che definiscano funzioni doppiamente periodiche di più sorta, le une monodrome in tutta l' estensione del piano, le altre che mutino valore quando si giri intorno a certi punti ».

Ecco ora il sunto della seconda Memoria. « Nella Memoria precedente abbiamo svolto un metodo generale per studiare le proprietà delle funzioni definite dalle equazioni differenziali. Adesso ci proponiamo di applicare siffatto metodo alle equazioni differenziali della forma

$$F\left(\frac{dw}{dz}, w\right) = 0 ,$$

in cui F significa un polinomio intero tra la funzione w e la sua derivata $\frac{dw}{dz}$, del grado m rispetto a quest' ultima, e non contenente la variabile z ».

« Dapprima dimostriamo che ad ogni valor di w corrispondono m valori di z, cresciuti o diminuiti di multipli qualunque di certi periodi ω, ω', ... ».

« Poscia dimostriamo che, se ad ogni valor della variabile corrisponde un numero limitato di valori della funzione w, l' integrale è radice di un' equazione algebrica intera fra w ed una quantità che è, o la stessa variabile indipendente z, o la funzione circolare tang $\frac{\pi z}{\omega}$, o la funzione ellittica $sn(gz)$ ».

« Da ciò concludiamo che, se l' integrale è monodromo, esso è, o una frazione razionale, o una funzione monodroma semplicemente periodica, o una funzione monodroma doppiamente periodica. Nel primo caso, l' integrale è il quoziente di due polinomi interi in z, l' uno del grado m, l' altro al più del grado m. Nel secondo caso, l' integrale vien espresso da una frazione razionale in tang $\frac{\pi z}{\omega}$; nel terzo caso, da una frazione razionale, tra la funzione ellittica $sn(gz)$ e la sua derivata, come risulta da un notabile teorema del sig. Liouville ».

« Ci occupiamo specialmente delle equazioni differenziali che ammettono integrali monodromi. In prima diamo i caratteri semplicissimi coi quali si riconosce, all' inspezione dell' equazione differenziale, se l' integrale sia monodromo, e poi diciamo come si distingua a qual categoria appartenga ».

« Questo studio diretto dell' equazione differenziale ha grande importanza, da prima ci fornisce le proprietà fondamentali della funzione integrale, e ne caratterizza la natura. In oltre, ci permette di effettuare la integrazione come la si intende di ordinario, di esprimere cioè la funzione integrale mediante segni convenuti, ove sia possibile. Noi troviamo la forma dell' espressione e poi ne calcoliamo i coefficienti (1). Questi coefficienti sono di due sorta, quelli che entrano nella composizione dell' espressione e quelli che servono a definire la funzione circolare $\tang \frac{\pi z}{\omega}$, o la funzione ellittica $sn(gz)$. I primi li otteniamo mediante equazioni di primo grado. Quando l' integrale è semplicemente periodico, la costante ω, che entra nella funzione circolare, è data immediatamente dall' equazione differenziale. Quando l' integrale è doppiamente periodico, le due costanti g e k (modulo), che definiscono la funzione ellittica, sono date da equazioni algebriche di grado più o meno elevato ».

(1) Pensiamo che i giovani, ai quali le nostre *Notizie* sono destinate, leggeranno con attenzione questi sunti dei sigg. Briot e Bouquet, e vorranno interpretarli come un' ammaestramento di carattere affatto generale, ossia vorranno riconoscerli come una tratteggiatura un po' più circostanziata di quella che noi stimammo di premettere per far comprendere sin da prima l' indole del metodo di studiare le equazioni differenziali che dissimo moderno. Crediamo utile riaffermare questi punti: che cioè la deduzione della proprietà ha da precedere la ricerca delle espressioni analitiche della funzione integrale; che anzi hanno da essere precisamente le proprietà quelle che, col progresso della teorica generale delle funzioni, indichino le varie forme analitiche colle quali la funzione potrà rappresentarsi; e che, volendosi effettivamente una qualche espressione analitica della funzione, non ha da rimanere poi altro da fare che calcolazioni, per così dire, di secondaria importanza, cioè le calcolazioni dei coefficienti contenuti in quella forma di espressione che si vorrà preferire. Aggiungeremo infine, che in gran numero di casi sono anche veramente le sole proprietà delle funzioni, e niente affatto qualche loro espressione analitica, che fa d' uopo conoscere. Basta riflettere, per esempio, alle funzioni circolari: le proprietà di queste funzioni sono invocate nell' analisi spessissimo indipendentemente da ogni loro espressione analitica.

« Abbiamo applicato il nostro metodo d' integrazione alle equazioni differenziali binomie della forma

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)^m = f(w) \ ,$$

in cui $f(w)$ esprime un polinomio intero in w al più del grado $2m$, ed abbiamo dimostrato che, oltre i casi nei quali l' integrale è razionale o semplicemente periodico, esistono undici equazioni differenziali di questa forma che danno origine a funzioni monodrome doppiamente periodiche ».

« Abbiamo applicato lo stesso metodo ad altri esempi più complicati ».

Passiamo al sig. Weierstrass. Nel §. 3 del citato compendio *Zur Theorie der Abel'schen Functionen* si trova accennato, e nel §. 7 della posteriore Memoria *Theorie der Abel'schen Functionen* si trova svolto un metodo per decidere se una funzione w, di una variabile z, definita da una equazione algebrico-differenziale abbia il *carattere delle funzioni razionali intere o fratte* (1), e per ottenere, verificandosi il secondo caso, *due* equazioni differenziali che servano alla determinazione del numeratore e del denominatore di w. A fondamento del metodo è posto il seguente teorema.

Se una funzione monodroma $F(z)$ possiede la proprietà che, ogni qualvolta si ponga $z=a+\varepsilon$, essendo a qualsiasi numero particolare, si possa svolgere in serie convergente almeno per valori bastantemente piccoli della variabile ε e della forma

$$m_a \frac{d^\lambda \, l\varepsilon}{d\varepsilon^\lambda} + \sum a_r \, \varepsilon^r \qquad , \qquad (r=0, 1, 2, \ldots, \infty$$

(1) Cioè se sia esprimibile per una serie o per un quoziente di serie ordinate secondo la potenze intere positive della variabile e convergenti per qualunque valor finito della medesima. Cauchy direbbe *funzione sinettica* (pag. 72 e 83) ciò che il sig. Weierstrass *funzione avente il carattere delle razionali intere*. Senza niente affatto pretendere di qualificare come non abbastanza opportuna quest' ultima maniera di dire che vedemmo a un dipresso anche usata da Jacobi (pag. 14), crediamo utile di ben segnalare il seguente divario tra una funzione razionale intera ed una non razionale ma che direbbesi averne il carattere: che, divenendo infinita la variabile, la prima diventa pure inevitabilmente infinita, mentre la seconda tende ad uno o ad altro valore secondo il modo con cui la variabile va all' infinito.

dove λ *ed* m_a *designino numeri interi positivi, invariabile il primo, mutabile con* a *il secondo e però nullo ogniqualvolta* $F(a)$ *resti finita: si potrà determinare una funzione* $f(z)$ *avente il carattere delle razionali intere che soddisfi la*

$$\frac{d^\lambda\, lf(z)}{d\, z^\lambda} = F\ .$$

Ed anzi, supposto che per valori bastantemente piccoli di z *siasi trovato*

$$F = m_0 \frac{d^\lambda\, l\, z}{d\, z^\lambda} + \sum 0_r\, z^r\ ,$$

si otterrà la espressione la più generale di $f(z)$ *sviluppando in serie secondo potenze di* z *la formola*

$$z^{m_0}\, e^{\sum \left\{ \frac{0_r\, z^{\lambda+r}}{(r+1)\ \ldots\ (r+\lambda)} \right\} + C_0 + C_1 z + \ldots + C_{\lambda-1}\, z^{\lambda-1}}$$

in cui $C_0\,.\ C_1, \ldots, C_{\lambda-1}$ *significhino costanti arbitrarie; e ciò quand' anche la serie*

$$\sum \frac{0_r\, z^{\lambda+r}}{(r+1)\ \ldots\ (r+\lambda)}$$

non converga per tutti i valori finiti di z.

Ciò premesso, il metodo prescrive di ridurre (1), se possibile, la equazione differenziale proposta alla forma

(1) Dalla equazione proposta si potrà sempre ottenere per la derivata di lw d' un' ordine λ opportunamente alto una espressione della forma

$$\frac{d^\lambda\, lw}{dz^\lambda} = \Phi\left(z,\, w,\, \frac{dw}{dz},\, \ldots,\, \frac{d^{\lambda-1}\, w}{dz^{\lambda-1}}\right)$$

dove Φ sia funzione razionale di w, $\frac{d\,w}{d\,z}$, ecc., i cui coefficienti sieno costanti o funzioni analitiche monodrome di z.

Allorchè w abbia il carattere delle funzioni razionali fratte, indicandone con $f_1(z)$ ed $f_2(z)$ il numeratore ed il denominatore, il primo membro della precedente equazione può scriversi come differenza

$$\frac{d^\lambda\, lf_1(z)}{d\, z^\lambda} - \frac{d^\lambda\, lf_2(z)}{d\, z^\lambda}\ ,$$

i due termini della quale posseggono la proprietà che viene quindi richiesta nelle F_1, F_2.

$$\frac{d^\lambda lw}{dz^\lambda} = F_1 - F_2 \ ,$$

in cui F_1 ed F_2 abbiano la proprietà ammessa per F nel teorema precedente. Quando si riesca ad ottenere un' equazione di questa forma, allora, ponendo

$$w = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \ ,$$

la equazione stessa può decomporsi nelle due

$$\frac{d^\lambda l f_1(z)}{dz^\lambda} = F_1 \quad , \quad \frac{d^\lambda l f_2(z)}{dz^\lambda} = F_2$$

le quali ammettono per f_1 ed f_2 espressioni della natura dianzi asserita per f.

Quando poi si possa anticipatamente sapere (e questo appunto avviene per le funzioni considerate nella Memoria) che w sia funzione monodroma di z la quale, scegliendo un qualunque numero particolare a, si possa sempre sviluppare in serie ordinata secondo le potenze di $z-a$ intere crescenti (le prime delle quali positive o negative) e convergente per tutti i valori di z prossimi ad a: allora basta saper mettere la espressione Φ sotto forma di differenza $F_1 - F_2$ di due altre espressioni della stessa natura, delle quali la prima diventi infinita solo quando w diventi nulla e la seconda solo quando w diventi pure infinita; che, ciò fatto, si avrà certezza che le funzioni F_1, F_2 avranno la proprietà ammessa per F, e che quindi le serie ricavabili per f_1 ed f_2 nel modo sopra dichiarato dalle equazioni

$$\frac{d^\lambda l f_1(z)}{dz^\lambda} = F_1 \quad , \quad \frac{d^\lambda l f_2(z)}{dz^\lambda} = F_2$$

riusciranno convergenti per qualunque valor finito di z (1).

(1) Abbiamo già altrove avvertito che nella Memoria del sig. Weierstrass l' effettiva applicazione di questo metodo trovasi svolto per disteso soltanto pel caso delle funzioni ellittiche. Qui però non ommetteremo di raccomandare l' attenzione per questa semplice e diretta determinazione di espressioni notabilissime delle funzioni ellittiche e per la nuova trattazione, che ne consegue, della intiera teorica delle medesime. In coteste espressioni

Veniamo per ultimo al sig. Riemann. Citandolo tra quelli che hanno promosso la nuova maniera di studiare le equazioni differenziali non vogliamo dire ch' egli abbia *espressamente* dedicati degli scritti a questo argomento; ma che nel complesso della sua dottrina non si può a meno di riconoscere i modi forse i più efficaci per progredire in tale studio precisamente secondo la maniera anzidetta. Del resto vi ha una Memoria che può anche benissimo considerarsi come veramente dedicata a ciò ed è quella intitolata *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss' sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen* (1). L' autore dice nella introduzione alla medesima « Nella presente Memoria ho trattato questa trascendente (cioè la funzione di x rappresentabile, finchè il modulo di x non superi l' unità, con $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$) con un metodo nuovo che in sostanza si può applicare ad ogni funzione che soddisfi ad una equazione differenziale lineare con coefficienti algebrici ». Tuttavia dobbiamo avvertire che, nell' ordinamento sintetico piaciuto al sig. Riemann, la equazione differenziale, di cui il suo lavoro può dirsi somministrare la integrazione, non forma il punto di partenza, ed anzi non compare se non nel settimo degli otto articoli che lo compongono. Per dare però a siffatto lavoro interamente l' aspetto di uno studio d' integrazione della suddetta equazione differenziale, basta in prima cavare da questa (il che agevolmente può farsi) le proprietà messe nell' art. 1 a fondamento di tutta la investigazione. Nella quale pertanto chiunque potrà chiaramente ravvisare un prezioso modello del metodo in discorso. Ma contentiamoci delle brevi riflessioni qui fatte; che non sarebbe

fratte, già accennate da Abel senza però indicazione alcuna del modo di ottenerle, le serie che ne costituiscono i numeratori ed il denominatore convergono per qualunque valor finito del modulo come della variabile, ed hanno per coefficienti funzioni razionali intere del quadrato del modulo con coefficienti numerici razionali.

Additeremo io riguardo del sig. Weierstrass anche le allusioni che faceva nella Memoria *Ueber die Theorie der analytischen Facultäten* (Giorn. di *Crelle*, tomo 51, pag. 43 e 44) ai propri studi di rigorosa integrazione per serie delle equazioni differenziali.

(1) Tomo 7 delle Memorie della R. Società delle Scienze di Göttingen. 1857.

opportuno entrare in particolari su questa Memoria senza per anche aver data un' idea in genere dei fondamenti della intera dottrina riemanniana. E soltanto faremo ancora notare come nella famosa Memoria *Theorie der Abel'schen Functionen* (pag. 151 del tomo 54 del giorn. di Crelle-Borchardt) il sig. Riemann prometta una distesa teorica delle funzioni soddisfacenti ad una equazione differenziale lineare con coefficienti algebrici.

Terminando di occuparci in particolar modo delle equazioni differenziali, facciamo ancora ritorno a Cauchy per toccare di altre sue produzioni che pure somministrarono abbondanti e preziosi materiali pel corpo di dottrina a cui è volto questo corso.

Intendiamo specialmente denotare il *calcolo dei residui* che precedette ed il *calcolo degli indici delle funzioni* che comparve pressochè nello stesso tempo del calcolo dei limiti. Anche di queste due creazioni di Cauchy avremmo dunque dovuto tenere più presto parola se non avessimo voluto far osservare da prima nel modo il più diretto la dipendenza della nuova maniera di studiare le equazioni differenziali dal concetto svolto nella Memoria dell' Agosto 1825. Non tutti i materiali ammassati in queste tre *teorie* o *calcoli* furono, a nostro avviso, abbastanza generalmente riconosciuti ed utilizzati per la moderna teorica delle funzioni (1).

Diciamo in primo luogo qualche parola del calcolo dei residui. Di esso più particolarmente si può asserire, definendone come integrale curvilineo l' elemento su di cui è costruito, che contiene i principi i più generali finora impiegati per la investigazione delle proprietà delle funzioni di variabili affatto libere, cioè complesse.

Cauchy aveva osservato che in un gran numero di casi dove figurino funzioni o, per farci meglio intendere, dove figuri *una* funzione di una variabile z la quale passi per l' infinito

(1) Le proposizioni che citammo dal 2 semestre 1846 dei *Comptes R.* possono riscontrarsi sotto forma più o meno variata negli scritti di molto anteriori relativi ai calcoli anzidetti.

(concepiscasi per un valore c della z), ciò che essenzialmente importa di considerare, perchè bene spesso bastante da solo a determinare il risultato, è il coefficiente di $\frac{1}{z-c}$ nello sviluppo della funzione in serie ordinata secondo le potenze di $z-c$. E pertanto risolvette di stabilire espressamente per siffatto coefficiente la denominazione di *residuo* ed una particolare notazione (che qui non fa d' uopo presentare) e di costruire una *teoria dei residui*, che faceva poi conoscere per la prima volta nel 1826 con una Memoria intitolata *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal* (1).

Per dare una idea della moltiplice utilità che anche sino d' allora Cauchy riconosceva in questa teoria riporteremo da quella Memoria il seguente brano. « Siffatti residui si presentano naturalmente in vari rami dell' analisi algebrica e della infinitesimale; la loro considerazione fornisce metodi semplici e di facile impiego, che s'applicano a gran numero di questioni diverse, e formole nuove che sembrano meritare l' attenzione dei geometri. Così, per esempio, si deduce immediatamente dal calcolo dei residui la formola d' interpolazione di Lagrange, la decomposizione delle frazioni razionali nel caso di radici sì eguali che differenti, formole generali acconcie per determinare i valori degli integrali definiti, la somma di una moltitudine di serie e particolarmente di serie periodiche, l' integrazione delle equazioni lineari alle differenze finite o infinitesime e a coefficienti costanti, con o senza ultimo termine variabile, la serie di Lagrange ed altre serie dello stesso genere, la risoluzione delle equazioni algebriche o trascendenti, ecc. ».

Ma non entreremo in indicazioni più particolari; poichè, non essendovene bisogno indeclinabile per la concatenazione delle nostre *Notizie*, non ci pare abbastanza utile il presentare qui (dove sarebbero da riprodurre i modi stessi da Cauchy allora adottati) sotto aspetto meno semplice ed in certo qual

(1) Tomo I degli *Exercices de Mathématiques*.

modo eterogeneo non piccol numero di formole e teoremi che debbono essere esposti in luoghi e sotto forme più opportune nel corso delle lezioni. E però ci limiteremo a presentare qualche riflessione in riguardo appunto alle mutazioni e semplificazioni che questa teorica andò ottenendo ed ancora potrebbe ottenere.

Il concetto di residuo si può ridurre al concetto di un integrale curvilineo molto semplice, e con simile riduzione il calcolo dei residui si semplifica e diviene d' assai più facile intendimento, in quanto che le sue proposizioni fondamentali rientrano ossia altro non sono che proposizioni elementari del calcolo integrale, quale devesi concepire al giorno d' oggi, che cioè abbracci debitamente la variabilità complessa. Ma anche le più ovvie proprietà e semplificazioni consentite della variabilità complessa erano nel 1826 e dovevano per non pochi anni ancora essere così stentatamente riconosciuti, che si vede l'autore stesso dell'*Analyse algébrique* e del *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* non dar segno di riconoscere molto presto l'anzidetta naturale riduzione, e non indursi a proporla se non nel 1857. Ed anche proponendola, egli non trae ancora dalla medesima tutto il vantaggio che, a nostro giudizio, è pur naturale di trarre. Ed invero pongasi mente nei brani che passiamo a riferire non soltanto alle nuove definizioni, ma anche all' intento che Cauchy dichiara di avere nel proporle (1). « . . . la definizione che da prima avevo dato di *residuo parziale ed integrale* (2) di una funzione lasciava qualche cosa a desiderare. Per verità tale definizione era analoga a quella data da Lagrange della *funzione derivata*; . . . Ma siffatte definizioni della derivata di una funzione e del suo residuo parziale relativo ad un dato valore della variabile si

(1) Vedi la *Théorie nouvelle des résidus* nei *Comptes R.* del I Sem. 1857.

(2) Denominava *residuo integrale* di una funzione *preso fra dati limiti* la somma dei residui relativi a tutti i valori *c* di *z* aventi parti reali e coefficienti di *i* compresi fra quei limiti, con una opportuna convenzione per quando i limiti stessi fossero precisamente raggiunti.

appoggiano sulla considerazione degli sviluppi in serie; e come io osservai nell' *Analyse algébrique* conviene evitare l' impiego delle serie di cui la convergenza non sia accertata. Nel *calcolo infinitesimale* vi si giunge sostituendo alla definizione di Lagrange la nozione chiara e precisa del *rapporto differenziale* di due quantità variabili, . . . Era a desiderare che si potesse stabilire anche il *calcolo dei residui* sopra una nozione chiara, precisa e facile ad afferrarsi, che fosse indipendente dalla considerazione delle serie. Dopo matura riflessione riconobbi che i principi posti, da una parte, nella mia Memoria del 1825 *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* e nella Memoria litografata del 27 Novembre 1831 (1), d' altra parte, nelle Memorie che pubblicai *sopra le funzioni monodrome e monogene* permettevano di raggiungere questo scopo ». E poscia, in sostanza, definisce come *residuo* di una funzione w monogena e monodroma, relativo ad un valor c di z che la rende infinita, il valore dell' integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int w\,dz \quad .$$

preso lungo un cammino chiuso (nel solito piano della z) che giri una sola volta intorno a c e non comprenda altri punti-valori di z pei quali w sia infinita (2). Ed imaginando una porzione S del piano di z per tutti i punti della quale w rimanga monodroma e monogena, chiama *residuo integrale di w relativo all' area S* il valore del suddetto integrale preso lungo l' intero contorno di S. L' intento che Cauchy manifesta colla proposta modificazione è dunque esclusivamente quello di evitare l' impiego delle serie. Ma, riflettendo, come dicemmo, che i teoremi fondamentali del calcolo dei residui vengono di tal guisa

(1) Di cui fra breve avremo a dire.

(2) Le già indicate proprietà degli integrali curvilinei avvertono non essere necessario nella definizione di individuare affatto questo cammino. Il cammino può subire, senza che muti il valor dell' integrale, tutte le infinite deformazioni che non offendono le condizioni espresse nella definizione.

ad essere non altro che teoremi semplici d' integrazione curvilinea (1), e che tutto ormai poteva esprimersi senz' imbarazzo di sorta col solo vocabolo *integrale* e col segno corrispondente, non avrebbe Cauchy operato un più efficace progresso nella propria teoria abbandonando la speciale denominazione di residuo e la speciale sua notazione ? Togliendo questa barriera di nomi e segni particolari avrebbe fatto rientrare totalmente il calcolo dei residui nell' analisi comune, rendendolo così d' immediato apprendimento per chiunque.

Noi siamo fermamente persuasi che, se Cauchy fosse stato in generale più restio all' introdurre nei propri lavori nomi e segni nuovi, od almeno più sollecito di sopprimerli, tostochè nuove idee o la scoperta di nuove relazioni permettevano di ridurli ad altri già famigliari; e se quindi avesse più di raro presentato, sotto aspetto di calcoli o teorie speciali e separate, complessi di metodi e proposizioni che, legati per vincoli essenziali e semplici cogli ordinari rami d' analisi, si sarebbero potuti presentare semplicemente come giunte o perfezionamenti di questi rami : siamo, ripeto, persuasi che i frutti delle sue ricerche sarebbero stati più agevolmente e da assai maggior numero di studiosi conosciuti ed apprezzati, ed avrebbero quindi ancora maggiormente contribuito al progresso della scienza (2).

(1) Così, per esempio, il teorema fondamentale : Se s' imagina S divisa in parti finite od infinitesime, in modo che w sia finita per ogni punto delle linee di divisione, il residuo integrale relativo ad S eguaglia la somma dei residui relativi alle singole parti; i quali ultimi residui saranno poi nulli o relativi ciascuno ad un solo valore di z, quando si concepiscano le parti in modo che ognuna non comprenda più di un punto c.

(2) Queste riflessioni voglionsi, ben inteso, riferire non ad un solo ma alla massa dei lavori del grande matematico. In riguardo poi specialmente di quelli che hanno più stretta attenenza col nostro corso, basterà progredire nello studio della moderna teorica delle funzioni appena di tanto da poter contemplare buon numero di teoremi dall' unico punto di vista della medesima, per riconoscere in tutta la evidenza quanto imbarazzo crei, quante difficoltà opponga ad un preciso apprezzamento dei risultati di Cauchy la moltiplicità dei nomi e dei segni speciali.

Non è mai da obliarsi che due condizioni sono egualmente essenziali pel progresso e cioè che non solo si vada incessantemente discoprendo verità nuove, ma che lo scoperto si possa sempre meglio ordinare e stringere in pochi principî e metodi generali;

Riferiamo ormai del calcolo degli indici delle funzioni. Cauchy espone per la prima volta questo calcolo, con definizioni e notazione pel medesimo espressamente create, nell'adunanza del 27 Novembre 1831 dell' Accademia delle Scienze di Torino (1). Lo scopo di questo calcolo è di offrire mezzi generali per numerare e separare le radici sì reali che complesse delle equazioni algebriche e trascendenti. Immaginando nel solito piano della z un contorno chiuso $O\,O'\,O''\ldots$, chiamando s una lunghezza variabile misurata su di esso a partire da un punto fisso, $\mathfrak{s}$ la lunghezza totale del medesimo, e $w(z)$ una funzione di z che sia dappertutto entro il contorno, insieme colla propria derivata $w'(z)$, continua e finita: Cauchy mostra che il numero m delle radici dell' equazione $w=0$ rappresentate da punti situati entro il contorno vien dato dalla formola (2):

affinchè chi novello imprende la carriera della scienza trovi una strada sempre meglio appianata e diritta, che gli permetta di giungere con forze non ancora invecchiate sì confine di ciò che si conosce a di quivi procedere all'indagine dell' ignoto.

Perciò, dall'esclusivo (si noti bene) punto di vista dell' analisi *pura*, sembrerebbero in oggi opportuni dei trattati che dai primi passi dell' algebra conducessero, con riguardo non troppo ritardato ai numeri complessi, sino agli ultimi più rilevanti risultati degli studi moderni, per una serie di considerazioni veramente essenziali, soffermandosi il meno possibile sopra le non poche teorie speciali, a cui si suole accordare sì largo posto nella più parte delle trattazioni di analisi algebrica e superiore. Così, per esempio, nell' analisi algebrica crederemmo vantaggioso: che, spiegata la riduzione dei radicali a potenze d' esponente frazionario, si abbandonassero più recisamente l' antico segno e le regole speciali per esso stabilite; che non si facessero digressioni troppo minuziose nelle speciali teorie dei seni, coseni, ecc. circolari e dei seni, coseni, ecc. iperbolici, entrambe le quali rientrano nell' unica teoria della serie esponenziale; nè in quelle delle funzioni circolari inverse e delle iperboliche inverse, che rientrano nell' unica teoria della funzione inversa della serie esponenziale, cioè della funzione logaritmica; ecc.

(1) La Memoria da lui presentata nell' adunanza ha per titolo *Sur les rapports qui existent entre le calcul des résidus et le calcul des limites, et sur les avantages que présentent le deux nouveaux calculs dans la résolution des équations algébriques ou transcendantes*. La medesima, allora litografata, venne anche tradotta in italiano e stampata nel tomo 22 delle *Memorie di Matem. e di Fis. della Società Italiana* (Modena, 1839). Il sunto lettone nell' adunanza può vedersi nel tomo 16 (pag. 116) del *Bulletin des sciences math., phis. et chim. de Férussac*.

(2) Dà anche la formola più generale

$$F(z_1)+F(z_2)+\ldots+F(z_m)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\mathfrak{s}}\frac{w'(z)}{w(z)}\,F(z)\,\frac{dz}{ds}\,ds,$$

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\mathbf{s}} \frac{w'(z)}{w(z)}\,\frac{dz}{ds}\,ds$$

Importa dunque di saper calcolare questo integrale. Designando con $u(s)$, $iv(s)$ le parti reale ed imaginaria di w espresse con s e con $u'(s)$, $iv'(s)$ le loro derivate rispetto ad s, Cauchy scrive:

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{\mathbf{s}} \frac{u'(s)+iv'(s)}{u(s)+iv(s)}\,ds \quad ;$$

indi osserva che, se siano $\varsigma_1, \varsigma_2, \ldots, \varsigma_\alpha$ le radici reali di $u(s)=0$ comprese fra 0 e $\mathbf{s}$ ed $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\alpha$ numeri infinitamente piccoli, dalla eguaglianza qui sotto simboleggiata

$$\int_0^{\mathbf{s}} = \int_0^{\varsigma_1-\varepsilon_1} + \int_{\varsigma_1+\varepsilon_1}^{\varsigma_2-\varepsilon_2} + \int_{\varsigma_2+\varepsilon_2}^{\varsigma_3-\varepsilon_3} + \ldots + \int_{\varsigma_\alpha+\varepsilon_\alpha}^{\mathbf{s}} \;,$$

si ottiene (1)

$$\int_0^{\mathbf{s}} \frac{u'(s)+iv'(s)}{u(s)+iv(s)}\,ds = E_1 + E_2 + \ldots + E_\alpha \quad ,$$

dove è

$$E_r = l[\pm\{u(\varsigma_r-\varepsilon_r)+iv(\varsigma_r-\varepsilon_r)\}] - l[\pm\{u(\varsigma_r+\varepsilon_r)+iv(\varsigma_r+\varepsilon_r)\}]$$

ed il segno $\pm$ deve sempre ridursi al $+$ od al $-$ in modo che la parte reale della quantità di cui va preso il logaritmo

essendo F funzione continua e finita dappertutto entro il contorno e $z_1, z_2, \ldots z_m$ le radici di $w=o$ da esso abbracciate. Ma non vogliamo qui entrare in particolari su quanto svolge in questa Memoria, e ne anche in troppi particolari su ciò che più specialmente si riferisce agli indici; nostro scopo non essendo di considerare l' argomento della risoluzione delle equazioni, sì bene soltanto di far intendere l' attenenza anche di queste ricerche di Cauchy colla teorica delle funzioni in generale. La formola precedente ed in particolare quella sopra esposta (per la quale $F(z)=1$) sono tra le più belle ed importanti che concorrano a formare la detta teorica.

(1) Avendo w un solo valore in ogni punto del contorno, è:

$$l[\pm\{u(\mathbf{s})+iv(\mathbf{s})\}] - l[\pm\{u(0)+iv(0)\}] = 0$$

riesca positiva. Finalmente riflette che E_r svanisce, se il rapporto

$$\frac{v(s)}{u(s)}$$

non cambi di segno con $s-\varsigma_r$; e riesce invece eguale a $-\pi i$ o $+\pi i$, se il rapporto stesso, diventando infinito per $s=\varsigma_r$, passi come $s-\varsigma_r$ dal negativo al positivo o contrariamente dal positivo al negativo (1). Si è da questa riflessione che Cauchy prende motivo d'introdurre la nozione di *indice*. Chiama *indice* di una funzione reale $\varphi(s)$, di una variabile reale s, relativo ad un valore a di s che la rende infinita, il numero $+1$, ovvero 0, ovvero -1, secondochè, passando s da valori più piccoli a valori più grandi di a, la funzione passi dal negativo al positivo, ovvero non muti segno, ovvero passi dal positivo al negativo. Chiama poi *indice integrale* di $\varphi(s)$ preso fra due dati limiti la somma degli indici corrispondenti ai diversi valori di s che rendono infinita la $\varphi(s)$ ed esistono fra i limiti dati (2). Può quindi enunciare il teorema: il numero delle radici di $w(z)=0$ rappresentate da punti situati entro $0\,0'\,0''\ldots$ eguaglia con segno contrario la metà dell'indice integrale di $\frac{v(s)}{u(s)}$ preso fra i limiti 0 ed s. E però prende a trattare della determinazione degli indici integrali delle funzioni. Per funzioni razionali fa vedere che siffatta determinazione può ridursi alla ricerca del massimo comun divisore tra le funzioni intere numeratore e denominatore. Ed è appunto alla determinazione di indici di frazioni razionali che si riduce la determinazione del numero m in tutti i casi ne' quali il contorno $0\,0'\,0''\ldots$ sia composto semplicemente di rette o di archi circolari, ovvero, più in generale, di archi di linee tali che le coordinate del punto corrente per ognuno di essi possano esprimersi razionalmente in funzione di una terza variabile.

Anche sull'argomento del calcolo degli indici delle funzioni

(1) A schiarimento di tal punto può osservarsi il § 3 del cap. 9 dell'*Analyse algebrique*.

(2) Ommettiamo, siccome qui non bisognevole, la notazione corrispondente.

Cauchy ritorna replicatamente in seguito. Un' anno e mezzo dopo la presentazione del riferito lavoro, compie una nuova Memoria (1) per mostrare come i principi del detto calcolo, che erano stati dedotti dalla considerazione degli integrali definiti, si potessero stabilire anche indipendentemente da formole di calcolo integrale.

Ritorna però a servirsi degli integrali, che hanno sì naturale colleganza con questo argomento. Nel tomo 40 (1 Sem. 1855) dei *Comptes R.* lo si vede introdurre la denominazione di *compteur logarithmique* (2) per il secondo membro della già esposta equazione

$$m = \frac{1}{2\pi i}\int_0^s \frac{w'}{w}\frac{dz}{ds}\,ds \quad .$$

Tralasciando di mettere in evidenza una variabile reale (la qual cosa per quanto poco peso vi si voglia attribuire è pur segno di più netta concezione e cresciuta famigliarità colla variabilità complessa) quest' integrale apparirà come segue

$$\int \frac{w'\,dz}{w} \quad \text{ovvero} \quad \int \frac{dw}{w} \quad \text{ovvero} \quad \int dl\,w \quad ,$$

ossia apparirà nella massima chiarezza quale incremento che ottiene in totalità il logaritmo naturale di w nel variare in modo continuo con z lungo l' intero contorno (3). Egli è per questo e per la proprietà di dare il numero delle radici di $w=0$

(1) Questa Memoria pubblicata a Torino nel Giugno 1833 può anche leggersi in italiano nel già citato tomo 22 delle Memorie della Società Italiana, e di molto accresciuta nel 25 *Cahier* (1837) del giorn. della Scuola Politecnica. Ma non entriamo in particolari e taciamo affatto delle equazioni simultanee, come non nominiamo gli articoli inserti nei *Comptes R.* del 1837, pel motivo già addotto dello scopo generale di queste *Notizie*.

(2) *Note sur les compteurs logarithmiques*. Pag. 1009.

(3) Giusta la Memoria *Sur les variations intégrales des fonctions* inserita nello stesso tomo dei *Comptes R.*, Cauchy chiamerebbe questo incremento la *variazione integrale del logaritmo corrispondente al contorno.*

La già chiarita dipendenza di questa quantità dagli *indici* può vedersi ancora spiegata in questo medesimo tomo all' articolo *Sur la distinction et la représentation des fonctions continues et discontinues.*

comprese nel contorno (1) che Cauchy applica al secondo membro della precedente equazione la denominazione su indicata. Del resto non si limita in questa ripresa dell'argomento a ripigliare in considerazione gli opportuni integrali e ad indicare semplificazioni, la cui utilità viene inceppata dai segni e nomi nuovi, ma somministra anche ulteriori svilnppi del medesimo. Nell'ultimo articolo che vi potè dedicare (2), indica come le formole, che precedentemente impiegava per l'enumerazione e separazione delle radici delle equazioni algebriche, si possano impiegare con successo anche in casi ove abbiansi equazioni trascendenti.

Passiamo ora a dire delle importanti ricerche dei signori Liouville ed Hermite sulle funzioni doppiamente periodiche; ricerche che riserbammo per la seconda serie nella mira di presentare più uniti quei lavori che da parte della Francia maggiormente concorsero a dare i materiali e determinare lo spirito della teorica generale delle funzioni di variabili complesse. La condizione della monogeneità, che già da sola vedemmo condurre a molte conseguenze precise ed importanti, combinata colla condizione della doppia periodicità, determina già in sì gran parte una funzione, che qualche condizione secondaria basta a renderla del tutto determinata. Col presentimento, possiamo dire, di questa verità il sig. Liouville concepisce il fecondo pensiero di intraprendere la formazione di una teorica delle funzioni monogene monodrome (3) e doppiamente periodiche, considerando la doppia periodicità puramente in se stessa cioè senza presupporne alcuna particolare

(1) Se w fosse infinita per qualche punto entro il contorno, non sarebbe più il numero delle radici di $w=0$, ma la differenza tra questo numero e quello delle radici di $\frac{1}{w}=0$, contenute già s'intende entro il contorno, che verrebbe dato dal secondo membro della esposta equazione.

(2) *Sur les compteurs logarithmiques appliqués au dénombrement et à la séparation des racines des équations transcendantes.* Tomo 44 (1857) dei *Comptes R.*

(3) Per uniformità ci permettiamo di usare qui pure i vocaboli di Cauchy sebbene non potessero allora trovarsi nel linguaggio del sig. Liouville.

origine analitica. Mette a base della sua teorica la seguente proposizione : *una funzione monogena monodroma e doppiamente periodica non può rimanere finita per ogni valore finito della variabile, a meno che sia una costante.* Egli comunica questa proposizione all' Accademia delle scienze di Parigi quasi per incidenza nel 1844 a proposito di una Nota del sig. *Chasles* sulla costruzione geometrica delle amplitudini delle funzioni ellittiche (1), e non consegna più nulla alla stampa intorno a sì importante soggetto fino al 1851, allorchè giunge in certo qual modo a stimolarlo un rapporto di Cauchy sopra una Memoria presentata all' Accademia dal sig. Hermite relativa pur essa alle funzioni doppiamente periodiche (2). Sebbene abbia comunicato la sua teorica a vari matematici privatamente e debba averla esposta in qualcuno dei corsi al *Collegio di Francia*, tuttavia non ci tratterremo dal lamentare che l' illustre analista non abbia voluto darle tutta quella diffusione che sarebbe stata richiesta dall' alta sua importanza.

Ecco una indicazione dei risultati consegnati in un manoscritto del 1847 redatto su lezioni di lui (3). Imaginando il solito piano rappresentativo dei valori della variabile diviso mediante due sistemi di rette parallele in parallelogrammi tutti eguali, i cui lati rappresentino in grandezza e direzione i due periodi di una funzione doppiamente periodica, questa prende già tutti i suoi valori possibili anche in uno solo qualunque di siffatti parallelogrammi, che perciò dovrà contenere qualche punto dove la funzione sia infinita, o (nei termini del sig. Liouville) qualche infinito della funzione (4). Classifica quindi

(1) Vedi i *Comptes R.* del 2. Semestre 1844 alla pag. 1262.

(2) Vedi nei *Comptes R.* del 1 Sem. 1851 (da pag. 442 a pag. 454) il rapporto di Cauchy, le osservazioni del sig. Liouville e la Nota successiva di Cauchy.

(3) Nelle citate osservazioni (pag. 451) egli dice : *i due distinti geometri tedeschi i sigg. Borchardt e Joachimsthal, durante il loro viaggio a Parigi nel 1847, vollero bene sacrificare alcune ore per udire l' esposizione della mia dottrina, ed il sig. Borchardt ha redatto le lezioni che di tal guisa fui condotto a fare.* La pag. 452 presenta l' indice del manoscritto del sig. Borchardt.

(4) Dopo simili investigazioni del sig. Liouville andò estendendosi l' uso di chiamare *infiniti di* w (funzione qualunque) i valori di z (variabile indipendente) pei quali w è ∞,

le funzioni doppiamente periodiche a seconda del numero degli infiniti che posseggono in un parallelogrammo. Dimostra che non ve ne hanno di quelle ad un solo infinito; che per tutte il numero degli *zeri* eguaglia in ogni parallelogrammo il numero degli infiniti; che la somma dei posti degli zeri eguaglia in ogni parallelogrammo la somma dei posti degli infiniti, astrazion fatta dai multipli interi dei periodi. Esprime le funzioni ad n infiniti con somme e con prodotti di funzioni a due infiniti. Entra in maggiori particolari sulle funzioni a due infiniti e mostra che si riducono alle funzioni doppiamente periodiche prodotte dalla inversione degli integrali ellittici; ond' è che le funzioni ellittiche possono davvero risguardarsi, secondo la previsione di Jacobi, come l' elemento unico delle funzioni doppiamente periodiche monogene ed a numero finito di valori per ogni valore della variabile. I teoremi sull'addizione e sulla trasformazione diretta o inversa sono in questa teorica ridotti, per così dire, alla semplicità del problema algebrico di formare una funzione razionale di cui il numeratore ed il denominatore debbano annullarsi per dati valori della variabile.

Dopo il sig. Liouville è il sig. Hermite, come accennammo,

e *zeri* quelli pei quali w è 0. La espressione *infinito di* w (più breve di *radice dell' equazione* $\frac{1}{w} = 0$, che sì spesso ricorre in Cauchy, ovvero di *valore di* z *che rende infinita* w) e l' altra analoga permettono di introdurre maggior semplicità ed eleganza nella esposizione. Osserviamo però che si può ottenere presso a poco lo stesso vantaggio anche senza rinunciare ad un' uso più proprio delle parole *infiniti di* w e *zeri di* w, cioè intendendo tuttavia con queste parole non i valori di z pei quali w sia infinita e nulla, ma precisamente i valori stessi ∞ e 0 di w. Ed invero vedremo che in generale nello studio di w come funzione di z conviene imaginare sin dal principio (come appunto fa qui, in sostanza, il sig. Liouville) che i valori di w giacciano distribuiti nei punti corrispondenti del piano di z; od in altri termini, conviene imaginare che w, piuttosto che in una espressione analitica d' onde si possa fissando il valor di z cavare allora un particolar valore per w (w ritengasi tuttafiata monodroma), consista in un sistema generalmente *continuo* di valori giacenti inrimovibilmente in tutti i punti o *posti* dell' intero piano di z (o di una sua porzione quando si voglia ritenere w esistente o da considerarsi soltanto per valori di z compresi entro certi confini). Ciò premesso ci sembra che il dire: *gli zeri di* w *sono in* $a_1, a_2, \ldots$; *la somma dei posti* (valori di z) *degli zeri eguaglia la somma dei posti degli infiniti*; ecc. riesca a dipresso egualmente breve e più proprio del dire: $a_1, a_2, \ldots$ *sono gli zeri di* w; *la somma degli zeri eguaglia la somma degli infiniti*; ecc.

che parimenti prende ad investigare in modo generale le funzioni dotate di doppia periodicità. Questi si propone di determinare la forma la più generale che possa prendere una funzione monodroma doppiamente periodica e monogena (1). A tal fine si serve principalmente dei principi stabiliti nelle Memorie di Cauchy ed in ispecie nel calcolo dei residui. Fra le proposizioni notabili presentate dall' autore citeremo la seguente, la quale, colla stessa facilità con cui discende dai noti teoremi di Cauchy, somministra alla sua volta varie importantissime proprietà delle funzioni doppiamente periodiche: *Il residuo integrale di qualunque funzione doppiamente periodica monogena e monodroma, relativo all' area di un parallelogrammo formato dai periodi, è nullo.* Condotto ad introdurre la funzione

$$\theta(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{\frac{2m\pi(z-b)}{a}i}}{1-q^{-2m}},$$

dove

$$q = e^{\frac{\pi b}{a}i}$$

ed a e b significano i due periodi delle funzioni di cui ricerca la forma la più generale, trova per questa forma la somma di un numero di termini ognuno dei quali è proporzionale ad una funzione della natura

$$\theta(z-z_1)$$

od alla sua derivata rispetto a z, z_1 essendo un valor particolare di z. È questo il teorema fondamentale ottenuto dal sig. Hermite. La funzione $\theta(z)$ ammette soltanto il periodo a, ma la sua derivata $\theta'(z)$ ammette tutti due i periodi a e b. Il sig. Hermite conchiude agevolmente che il quadrato della derivata della funzione $\theta'(z)$ è proporzionale al prodotto dei tre fattori

(1) Togliamo queste notizie dal rapporto che dianzi dicemmo avere Cauchy letto all' Accademia sopra la Memoria del sig. Hermite.

$$\theta'(z) - \theta'\left(\frac{a}{2}\right), \theta'(z) - \theta'\left(\frac{b}{2}\right), \quad \theta'(z) - \theta'\left(\frac{a+b}{2}\right);$$

e quindi giunge, come già il sig. Liouville, a quell' importantissimo risultato che è la riduzione delle funzioni investigate alle funzioni ellittiche.

Termineremo di parlare dei lavori de' matematici francesi col dire parola dell' opera nella quale, insieme colle scoperte di Abel e Jacobi concernenti le funzioni ellittiche, trovasi combinata gran parte dei risultati da quelli ottenuti per formare gli elementi di una teorica generale delle funzioni di variabili complesse. Quest' opera è la già citata *Théorie des fonctions doublement périodiques et en particulier des fonctions elliptiques*. È divisa in cinque *libri*. Il *primo* di essi presenta e spiega le definizioni di Cauchy, ne dimostra il teorema sulla sviluppabilità delle funzioni in serie, e, da questo dedotte, le prime proprietà generali delle funzioni monogene. Il *secondo* contiene il metodo che, per lo studio delle funzioni definite da equazioni differenziali, risulta dai lavori di Cauchy, del sig. Puiseux e dai successivi, già del pari citati, dei due insigni autori; indi l' applicazione di esso alle equazioni le più semplici che danno origine a funzioni doppiamente periodiche; delle quali vien esposta buona parte di quelle notabili proprietà che abbiamo testè veduto doversi principalmente ai sigg. Liouville ed Hermite (1). I *libri terzo, quarto e quinto* versano esclusivamente sulle funzioni ellittiche, delle quali costituiscono una pregevolissima trattazione principiante quindi dal punto più naturale, cioè dalle equazioni differenziali. Finalmente il *sesto libro* presenta la integrazione delle equazioni differenziali per mezzo delle funzioni ellittiche, ed è precisamente la Memoria di cui riferimmo, pubblicata nel 36 *Cahier* del giornale della scuola politecnica.

(1) Vi si trova notata la equazione algebrico-differenziale del prim' ordine e dell' $n$esimo grado a cui soddisfa necessariamente una funzione doppiamente periodica monogena monodroma ad n infiniti; indicata dal sig. Méray, che presentava su di ciò una Memoria all' Accademia di Parigi nel 1 Sem. 1855. Vedi *Comptes R.*, tomo 40, pag. 787.

Prima di abbandonare quest' opera, ossia quel complesso di lavori francesi che più o meno compiutamente vi si trovano compendiati, ci sia permessa una parola di eccitamento per lo studio della medesima a quei giovani che bramano dedicare le loro forze al progresso dell' analisi matematica. Chi abbia già assistito ad uno degli ordinari corsi di calcolo differenziale ed integrale potrà intraprenderne lo studio senza andare incontro a difficoltà troppo gravi (1); e con esso non potrà a meno di accorgersi che l'analisi delle funzioni va acquistando un carattere nuovo (e tanto più in rapporto delle consuete trattazioni scolastiche) un carattere di generalità e di semplicità che infondendo alla scienza novello vigore la spinge per vie più chiare e più brevi a conquiste pur dianzi insperate. Nel periodo d' analisi infinitesimale che corre prima d' Eulero si vedono bensì riconosciuti in generale e con maestria applicati i principi cardinali di essa analisi; ma non si vede tuttavia costituirsi veramente una teorica delle funzioni. Le quistioni sono poste pressochè sempre ancora sotto aspetto concreto, intendiamo sotto aspetto geometrico o meccanico, e sono trattate con mezzi quasi sempre ancora particolari. La teorica delle funzioni comincia veramente ad apparire, e cioè distinta dalla geometria e dalla meccanica, come dottrina delle dipendenze fra quantità variabili considerate dall' astratto punto di vista numerico, in Eulero. Qui però osserviamo che le considerazioni in essa s' appoggiano sempre, dichiaratamente o tacitamente, sopra espressioni analitiche date o supposte esistenti, e che i mezzi coi quali essa penetra nella soluzione delle quistioni consistono quasi esclusivamente in serie di operazioni o trasformazioni di calcolo. Con Lagrange la medesima acquista molto in generalità, ma senza tuttavia modificare il proprio carattere di scienza tutta fondata su espressioni di calcolo e con trasformazioni di calcolo costrnita. Ora invece dall' opera

(1) Opportunissimo però riesce il premettervi lo studio delle ricerche del sig. Puiseux sulle funzioni algebriche.

in discorso traluce di questo carattere una essenziale modificazione. Il concetto di funzione va rendendosi indipendente dal *substratum* di *una espressione analitica*; il teorema di Cauchy trae anzi a risguardare la esprimibilità analitica come conseguenza di *proprietà* che d' ordinario naturalmente inchiudonsi nel concetto di dipendenza tra quantità variabili; questo teorema e quello del sig. Liouville (1) ed altri, che parimenti in virtù della variabilità complessa si andarono stabilendo, permettono di dimostrare, per esempio, l' identità di due funzioni senza trasformare una espressione analitica dell' una in una espressione analitica dell' altra, conducono ad introdurre nella determinazione delle funzioni piuttosto le proprietà che le espressioni analitiche, ed in conclusione conducono a procedere nella risoluzione delle quistioni più per via del puro ragionamento, vogliamo dire di semplici mentali combinazioni di teoremi o verità generali, che per via di incessanti operazioni o trasformazioni di calcolo (2).

Ma, per riconoscere questo progresso nell' analisi delle funzioni in sua maggior luce e fecondità, dobbiamo portarci da Parigi a quella piccola ma chiarissima città di Germania, dove

(1) Alludo al teorema fondamentale precedentemente menzionato, cioè che una funzione monogena monodroma la quale per i soli punti-valori della variabile situati entro una linea chiusa (entro, per esempio, un parallelogrammo) prenda già tutti i valori di cui è suscettibile deve, se non è una costante, avere qualche infinito entro la linea chiusa medesima.

(2) Non vogliamo arrischiare su questo punto molte parole; e però non intendiamo di dare una completa idea dell' influenza dei vari matematici nell' introdurre siffatta maniera di procedimento nell' analisi delle quistioni. In caso diverso non potremmo tacere altri nomi, ed, innanzi prendere in esclusiva considerazione i lavori del sig. Riemann, dovremmo ritornare anche ai lavori riferiti nella prima serie, per mettere, per esempio, in rilievo, tra gli scritti dei viventi, passi che tacemmo dei sigg. Weierstrass, Hermite, ecc.

Faremo piuttosto riflettere che, prima ch' avesse ad apparire nella teorica delle funzioni, questa maniera di procedere si andava svolgendo nell' algebra, e già largamente per opera dello stesso Lagrange. Ma nell' algebra le quantità furono assai prima che le variabili nella teorica delle funzioni ammesse come suscettibili di valori tanto complessi che reali, e le funzioni in quella considerate si poterono assai più presto definire senza effettive espressioni analitiche, per mezzo cioè di semplici proprietà o dati caratteristici, quali sono i valori delle variabili indipendenti pei quali riescono nulle o infinite, il grado, il numero delle costanti, il numero dei valori che ammettono.

il giovane sig. Bernardo Riemann va promulgando idee e risultati che lo dimostrano ben degno erede della cattedra di Gauss e Dirichlet.

Il primo lavoro ch' egli dà alle stampe è la *Dissertazione inaugurale* nel 1851. Sviluppando i germi posti da Gauss e Dirichlet, presenta in questa *Dissertazione* gli elementi della teorica delle funzioni (di una variabile complessa) in una generalità da nessuno prima di lui dispiegata e con metodi affatto originali della scuola di Gottinga (1). È però da lamentare che questa, del pari che l' altra posteriore e più famosa Memoria, sia stata redatta con tale concisione, che, atteso la novità dei modi di considerare e di certi mezzi di risolvere le questioni, riuscisse pressochè inacessibile ad ogni analista, che, non allevato nella scuola di Gottinga, non vi si trovasse in qualche particolare maniera preparato. Sebbene di poi l' autore stesso nelle proprie lezioni abbia modificato nel senso di una maggiore chiarezza e semplicità talune parti della trattazione, ed altri con opportune scritture divulgatala per la stampa in Germania; tuttavia noi siamo indotti a dare della *Dissertazione* notizia più circostanziata che d' ogni altro lavoro finora: perchè già da sola racchiude tutti i fondamenti di quella insigne dottrina che, penetrando con gran successo in una delle maggiori questioni che mai siensi presentate nell' analisi, provocò non ha guari l' attenzione e direi quasi lo stupore del mondo matematico; e perchè fra la gioventù del nostro paese non è ancora per mala sorte abbastanza generalmente conosciuta la lingua delle scritture dianzi accennate.

Infine aggiungeremo che per concepire adeguatamente ciò che noi intendiamo abbracciare con l' appellazione di carattere o spirito della moderna analisi delle funzioni (nel che vorremmo aver colpito giustamente ed esserci espressi con bastante chiarezza) si hanno da riunire nel pensiero come un solo tutto e le qui esposte riflessioni e quelle che già facemmo nel riferire sulle equazioni differenziali e quelle ancora che comparirono in seguito.

(1) Diciamo *scuola di Gottinga* per alludere in certo qual modo anche all' influenza avuta da Gauss e Dirichlet nello sviluppamento della dottrina riemanniana.

Il titolo della *Dissertazione* è il seguente: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie einer veränderlichen complexen Grösse.* Di essa comparve una traduzione italiana nel tomo 2 degli Annali di matem. (Roma, 1859). È questa che noi studiammo, non avendo potuto trovare un' esemplare tedesco.

La *Dissertazione* è divisa in brevi paragrafi. Nel paragrafo 1, notata la proprietà delle funzioni determinabili per mezzo di operazioni di calcolo da eseguirsi sulla variabile di avere la derivata indipendente dal valore del differenziale della variabile, l' autore fonda sulla medesima la propria definizione di funzione, stabilendo che : una variabile complessa $w = u + vi$ si dirà *funzione* di un' altra variabile complessa $z = x + yi$ quando vari con questa in modo che il valore della derivata $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente dal valore del differenziale dz (1), *senza presupporre veruna espressione analitica di w per mezzo di x ed y.*

Nel paragrafo 2 assume la solita rappresentazione geometrica separatamente per la variabile e per la funzione. Un punto O del piano A rappresenta z; un punto Q del piano B rappresenta w. La dipendenza di w da z può quindi rappresentarsi come un' imagine del piano A sul piano B.

Nel paragrafo 3 espone la nota proprietà di questa imagine , della somiglianza nelle parti infinitesime , ammesso che w sia funzione di z nel senso stabilito.

Nel paragrafo 4 espone le equazioni alle derivate parziali del primo e del secondo ordine che vedemmo dover essere soddisfatte dalle componenti reali u e v di una qualsiasi funzione w. Le equazioni alle derivate del second' ordine possono servire per la ricerca delle proprietà che appartengono ad una componente considerata separatamente dall' altra. L' autore avverte che anteporrà la dimostrazione delle più importanti di queste proprietà (2) allo studio delle funzioni complete w, ma

(1) Stabilendo questa definisione di *funzione* , il sig. Riemann può impiegare un solo vocabolo invece dei due *funzione monogena* impiegati nella scuola di Cauchy. Il sig. Bertrand nel suo recente trattato di calcolo differenziale adotta la definizione del sig. Riemann; spiegandone (pag. 362-365) coll' usata chiarezza le ragioni. Se non che ci permetteremo di manifestare il desiderio che non fosse usata la espressione *funzione imaginaria* per significare *funzione di una variabile imaginaria* (vale a dire complessa).

(2) Mediante l' equazione alle derivate del 2 ordine basterà investigare le proprietà di una delle due componenti , poichè le equazioni

che prima ancora deve spiegare e stabilire alcune cose generali per facilitare queste ricerche.

E pertanto, mettendo in disparte la rappresentazione di w mediante il piano B, del quale, se w sia a più valori, or l'uno or l'altro punto dovrebbesi concepire corrispondente ad uno stesso punto del piano A, introduce nel §. 5 una nuova rappresentazione mediante una superficie che riesca a più *strati* (1) se w sia a più valori, di guisa che ogni suo punto riesca in ogni caso rappresentativo di un solo valore di w legato invariabilmente con un solo valore di z. Siffatto luogo geometrico, destinato ad essere il campo intuitivo delle speculazioni dell'autore, è quella creazione di lui affatto originale nella quale si trova la ragione del suo linguaggio e di certi suoi procedimenti singolari, e la quale dapprima non bastantemente spiegata al di fuori della scuola di Gottinga, fu duro ostacolo a che in più largo circolo si diffondessero queste notabilissime speculazioni.

Non avendo esposto tutti gli opportuni particolari intorno le funzioni algebriche, non vogliamo adesso impegnarci a spiegare compiutamente la genesi di queste superficie in generale; e piuttostochè porgere d'altronde cenni generici e troppo incompleti preferiamo dare l'idea precisa della più semplice fra esse, al qual intento considereremo la funzione $w=\sqrt{z}$ ossia la relazione $w^2-z=0$. In tal caso è manifesto che per ogni valore di z, ossia per ogni posizione di O nel piano A, vi hanno due valori per w, i quali variano in modo continuo al muoversi di O, e che l'uno non può per variazione continua riuscire scambiato coll'altro se non quando O abbia compito un'intero giro intorno al punto $z=0$ pel quale i due valori di w con-

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\,,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

forniranno tosto ciò che abbisognerà rispetto all'altra.

(1) L'autore adopera propriamente la parola *Blatt* (foglia o foglio).

fondonsi in uno. Ciò premesso, imaginiamo che il luogo del punto O non sia più il piano stesso A ma un'altro piano A_1 posto o disteso sopra A (cui per brevità e chiarezza riterremo orizzontale) e tagliato lungo una linea che partendo dal punto $z=0$ vada, senza passare più volte per uno stesso punto, all'infinito (1); e imaginiamo deposto in un punto di A_1 uno dei due valori corrispondenti di w; e, facendo partire O da questo punto, imaginiamo che si deponga in ogni singola successiva posizione di O quello tra i sempre due valori di w che succede con continuità ai già deposti (2). Allorchè O avrà percorso per intero il piano A_1 ciascun punto di A_1 avrà ottenuto (terrà in se deposto) un valore di w (3). Sia ora A_2 un' altro piano sovrapposto ad A e A_1 e tagliato precisamente come A_1; depongasi in un suo punto (già rappresentante come in A e A_1 un valore di z) quello dei due valori corrispondenti di w che non giace fissato nel punto sottoposto di A_1; e, facendo qui pure partire O (adesso mobile in A_2) dal punto prescelto, imaginiamo che analogamente si deponga in ogni posizione di O il valore di w che succede con continuità ai già deposti, e che tutti quanti i punti di A_2 vengano così a conseguire un valore di w. Per tal modo in ogni due punti di A_1, A_2 sovrapposti ad uno stesso di A riescono deposti i due valori di w cor-

(1) Ogni punto di A_1 va risguardato come rappresentante o possedente lo stesso valore di z rappresentato dal punto sottoposto di A.

Del taglio distingueremo, occorrendo, gli orli in *destro* e *sinistro*, alludendo ad una persona che lo osservasse dal punto $z=0$. Per fissar le idee giova concepire rettilineo il taglio.

(2) La espressione *deporre nei punti di una superficie i valori di una variabile o le coppie di valori di due variabili*, non che, quella di dire A_1 disteso sopra e non confuso con A, ed altre che furono o che verranno impiegate potrebbero censurarsi perchè quasi supponenti estensione e nei singoli punti e nei numeri da concepirvisi fissati; ma è appunto per questo che hanno il vantaggio di significare con maggiore chiarezza ciò che si desidera di far comprendere.

(3) Dicendo che O s' ha da muovere in A_1 resta inteso che non possa traversare la linea del taglio, e quindi non descrivere alcun cammino chiuso che racchiuda il punto $z=0$, e però, se ripassasse più e più volte per uno stesso punto, il valore che w verrebbe quivi per successione continua a conseguire sarebbe sempre lo stesso, e deposto una volta si ritiene che non vi si deponga più nessun' altra volta.

rispondenti ad uno stesso di z. E, considerando i $2+2=4$ orli dei tagli di A_1 e A_2, si riconosce che i valori di w deposti lungo l' orlo destro dell' un piano sono ordinatamente eguali ai deposti lungo l' orlo sinistro dell' altro. Dunque, imaginando che vengano connessi lungo tutta la loro indefinita lunghezza l' orlo destro di A_1 col sinistro di A_2 ed il destro di A_2 col sinistro di A_1 (1), otterremo un' unica superficie a due piani o strati dotata delle proprietà, che *ogni coppia distinta* di valori di w e z ossia *ogni soluzione distinta* dell' equazione $w^2-z=0$ abbia in essa uno *ed un solo* esclusivo punto rappresentativo, e che qualunque variazione continua e simultanea di queste due variabili si possa raffigurare in un movimento continuo di un punto mobile in essa superficie, e viceversa (2). È questa la superficie che dovevamo descrivere, e che diremo una *riemanniana*, cioè una di quelle superficie imaginate dal sig. Riemann per lo studio delle funzioni, od anche brevemente, usando la lettera da lui continuamente adoperata, una T (3).

(1) Per scorgere in certo qual modo la reale possibilità di effettuare la connessione dei due secondi orli dopo effettuata quella dei due primi, od almeno per avvezzarsi a concepire quel traversamento di superficie che qui abbisogna, giova pensare ognuno degli strati come una rete di indefinita finezza di cui soltanto i nodi (o crocicchi dei fili) sieno i punti dello strato. Due reti possono traversarsi senza che nodi dell' una si confondano con nodi dell' altra; ed è precisamente così che dobbiamo concepire il traversamento risultante dalle effettuate connessioni degli orli.

(2) Se, per esempio, mantenendo costante il modulo, facciamo crescere di 4π in modo continuo l' argomento di z, uno qualsivoglia dei due valori di w variando pure in modo continuo riprenderà in fine il valore iniziale. Or bene corrispondentemente, se il punto mobile O nella descritta superficie, da un posto, per esempio, nello strato inferiore, prenderà a muoversi circolarmente intorno al punto $z=0$, giunto che sia alla linea di traversamento, passerà allo strato superiore e descritta in esso una intera circonferenza ripasserà nello strato inferiore, dove ritornerà al posto iniziale dopo aver compiato in complesso due precise circonferenze.

(3) La funzione $w=\sqrt{z}$ che poteva dirsi *a due valori* rispetto al punto mobile in A ora può dirsi *a valor* unico ossia *funzione monodroma del luogo o posto nella superficie T*.

La diversità con cui veggonsi trattate z e w mediante la T distesa sul piano A si potrebbe esprimere dicendo: che i valori di z vi si trovano proprio *rappresentati* nella loro grandezza, e cioè nella solita maniera mercè la posizione dei punti rispetto a quelli dove z ha i valori 0, 1, i ossia rispetto agli assi reale ed imaginario; mentre i valori di w vi si

Superficie di questo genere possono immaginarsi per quali si siano funzioni algebriche, le quali tutte riescono così trattabili come funzioni a valor unico. Sebbene particolarmente adatte allo studio di questa classe di funzioni e di quelle che per integrazione ne scaturiscono, nulla impedisce di imaginare cotali superficie anche per altre sorta di funzioni, se si possa trarne servigi non trascurabili quantunque meno rilevanti. E nella *Dissertazione* vengono appunto introdotte per la ricerca delle proprietà fondamentali di qualsisia funzione d'una variabile complessa.

Se era da aspettarsi che il concetto della T per il caso semplicissimo della funzione $w=\sqrt{z}$ riuscisse facilissimo, non è poi da credersi che siavi per contrario qualche essenziale difficoltà nel salire al concetto di una T conveniente a qualunque altra funzione algebrica; ogni difficoltà può appianarsi con lievi suggerimenti allorchè siensi premesse opportune considerazioni circa le funzioni algebriche (1). E nondimeno è il concetto di queste superficie che forma, come asserimmo, pel lettore non particolarmente preparato il primo e più duro ostacolo all'intendere la *Dissertazione*. E ciò perchè? il perchè,

trovano soltanto *individuati*, e cioè dai rispettivi punti dove concepisconsi irremovibilmente deposti, i quali punti non danno però colla propria posizione alcun'idea della grandezza dei valori medesimi. Del resto vedremo che, senza alterare in una T ciò ch'essa ha di *più essenziale* come strumento d'investigazione delle proprietà delle funzioni, si potranno concepire operate nella medesima delle trasformazioni, per le quali in luogo della diversità di trattamento or ora significata ne risulteranno delle altre, ed in particolare, volendosi, potrà risultarne trattato invece la w come poco fa la z, risultarne cioè la T così trasformata che si possa distendere sul piano B in modo che tutti i punti dove per w trovasi deposto uno stesso valore riescano situati sopra il punto rappresentativo del medesimo valore nel piano B. La qual cosa debitamente s'accorda col non alterarsi l'essenzialità di una relazione, qual'è appunto, per esempio, $w^2-z=0$, considerando come indipendente l'una piuttostochè l'altra delle due varibili. E per concepire più facilmente siffatte trasformazioni gioverà pur sempre imaginare le superficie come reti, di cui i nodi ne esprimano i punti mentre i fili sieno variabili in lunghezza flessibili e oltrepassabili, vale a dire, in sostanza, imaginarle come sistemi di punti separati, insensibilmente dal resto, tra loro.

(1) Le considerazioni da premettersi sono offerte dalle ricerche, di cui riferimmo, del sig. Puiseux. Perciò nel nostro corso le superficie riemanniane si vedranno introdotte dopo la esposizione di dette ricerche.

a nostro avviso, si trova principalmente in questo: che il sig. Riemann non fa salire in prima all'idea delle sue superficie colla considerazione di funzioni algebriche (la qual cosa non gli avrebbe impedito di far poi completa astrazione da ogni supposizione di espressioni analitiche e di intraprendere lo studio delle funzioni con l'unico dato di una superficie T della natura già riconosciuta e sorreggente un sistema generalmente continuo di valori), ma invece le introduce d'un tratto senza alcun preambolo come destinate ad essere luoghi rappresentativi per tutte le grandezze variabili che dovranno cadere in considerazione. Di tal guisa avviene che il lettore non possa bene comprendere, non solo il *perchè* (cui l'autore si riserba di far capire più tardi), ma anche il *come* sia da concepirsi la restrizione che nell'idea la più generale di strati sovrapposti e congiunti in sistema l'autore subito introduce, e che si trovi quindi avvolto in dubbi ed oscurità sino dalle prime righe concernenti siffatti luoghi rappresentativi.

Ma affrettiamoci a progredire nel rendiconto dei paragrafi. Nel §. in discorso adunque, dichiarata la introduzione delle superficie T, l'autore fissa il concetto dei *punti di giramento o di diramazione* (1), di quei punti cioè (come quello nella particolare T sopra descritta pel quale i due valori di $\sqrt{z}$ confondonsi in uno cioè hanno il valor zero) comuni a più strati girando intorno ai quali si passa da uno strato all'altro; un punto siffatto vien detto dell'$(m-1)$esimo ordine quando sia comune ad m strati, od in altri termini, quando girando intorno ad esso un punto mobile nella superficie debba compiere m giri per ritornare nello stesso strato e posto d'onde sia partito. E siccome suppone che la data T possa anche

(1) Li chiama *Windungspunkte* o *Verzweigungspunkte*. Nella traduzione italiana della *Dissertazione* sono chiamati *di giramento*; nella Memoria poi *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa* (Annali dell' Univ. Tosc. Tomo 7, 1863) il prof. Betti, senza d'altronde riportarsi alle superficie T, li chiama *punti di diramazione*. Essi sono i punti intorno ai quali si effettuano le sostituzioni menzionate quando riferimmo sulle ricerche del sig. Puiseux.

coprire soltanto una porzione finita del piano A (1), accenna che una siffatta T riesce o completamente determinata o limitata ad un numero finito di forme differenti quando ne siano dati sul piano A la posizione e il senso (cioè da qual banda rispetto ad esso giaccia la superficie) del contorno e la posizione dei punti di diramazione.

Nel §. 6 studia queste superficie per rispetto alla loro connessione. Egli dice che evvi *connessione* (Zusammenhang), ossia che sono tra loro *connesse* due parti di superficie, quando da un punto dell' una si possa condurre una linea che senza uscire dalla superficie vada ad un punto dell' altra. La connessione costituisce ciò che v' ha di più essenziale in queste superficie come strumenti d' investigazione delle proprietà delle funzioni; perciò siffatto studio è una preparazione di cardinale importanza. Esso vien fatto mediante i tagli trasversali. *Taglio trasversale* (Querschnitt) vien detto dall' autore un taglio che s' imagini fatto lungo una linea la quale partendo da un punto del contorno e traversando la superficie senza passare più volte per uno stesso punto termini ancora ad un punto del contorno, che potrebbe anche essere uno de' suoi stessi punti precedenti. Noi qui ci limiteremo a notare, che vien stabilito il concetto dell' *ordine della connessione*; e che quindi l' autore distingue le superficie (composte di un sol pezzo) in *semplicemente*, *doppiamente*, . . . *connesse*, chiamando *n uplicemente*

(1) Dobbiamo anzi far riflettere essere precisamente anche questa (cioè che una funzione sia data anche soltanto pei valori di z corrispondenti a porzioni di A) una supposizione in cui importa di mettersi per uno studio affatto generale delle funzioni. Egli è quindi con questa supposizione che il sig. Riemann comincia e seguita quasi sempre nella *Dissertazione* a concepire le superficie T. Dobbiamo dunque imaginare che di ogni strato, il quale potrebbe essere infinito, una porzione finita soltanto entri a comporre la T che nella detta supposizione s' imagina distesa sul piano A. Potendo però di tal guisa ogni strato avere una configurazione e situazione sopra A diversa quanto piaca da quelle degli altri strati, è manifesto: che il concetto generale di una T coprente soltanto una porzione del piano A ha in se ancor maggiore indeterminazione del concetto generale di una T che debba coprire interamente il piano A; e che perciò la detta supposizione doveva ancor più aggravare la difficoltà di formarsi di tal sussidio geometrico una chiara idea.

connessa (*n* fach zusammenhangend) una superficie la quale per mezzo di $n-1$ tagli trasversali può ridursi in una *semplicemente connessa*; vale dire in una che da qualsiasi taglio trasversale sarebbe divisa in due pezzi (ossia parti non più connesse) (1).

Nei §§. 7, 8, 9 espone quei teoremi sugli integrali relativi a contorni di superficie, i quali, indicati da Cauchy nei più volte addotti *Comptes R.* del 2 Sem. 1846, ed in parte contenuti in certo qual modo nella Memoria di Gauss che fra breve citeremo, già segnalammo come fondamentali nella teorica delle

(1) La superficie di un cerchio è semplicemente connessa; quella racchiusa fra due circonferenze concentriche (situate s' intende in un medesimo piano) è doppiamente connessa.

Ma, per far comprendere come si possano applicare le accennate nozioni al caso di una superficie (quale potrebbe supporsi qualunque T) illimitata in ogni senso, od al caso di una superficie di estensione limitata ma senza contorno cioè di una superficie chiusa (come sarebbe una sfera), bisogna aggiungere qualche suggerimento, la cui mancanza concorre pure a crescere le difficoltà di questa parte della *Dissertazione*, e che perciò crediamo bene di qui dare. Cominciamo a riflettere potersi adottare, oltre la solita in un piano, infinite altre rappresentazioni dei valori, se così si vuol dire, d' una variabile indipendente, od in altri termini, dei numeri complessi tutti quanti mediante superficie. Già in uso è la seguente. Al disotto del solito piano s' imagini una sfera che lo tocchi nel punto 0, e dal punto più basso di questa sfera condotta la retta al punto z del piano: il punto dove la retta traversa la sfera si risguardi come il rappresentativo del numero complesso z su questa superficie. Si può notare che così tutti i punti del piano infinitamente lontani dal punto 0, ossia tutti i valori infiniti di una variabile, vengono nella sfera rappresentati dall' unico determinato punto più basso, e possono quindi senza difficoltà concepirsi come un solo, e quasi direi determinato, valore. Se la sfera si supporrà di raggio infinitamente grande, il nuovo luogo di rappresentazione non sarà altro ancora che il solito piano, considerato però come una superficie che si chiude all' infinito. Qualunque T illimitata potrà quindi del pari considerarsi come chiusa all' infinito cioè come formata di strati sferici di raggio infinito; o, se più piace, trasformata in una T a strati sferici di raggio finito. Or bene finalmente, per applicare le nozioni, che già dissimo, ad una superficie senza contorno, s' imagini in prima staccato dalla medesima un punto, ossia una porzioncella od elemento infinitamente piccolo, e la linea infinitesima del distacco si risguardi come contorno della superficie. Seguendo questo precetto si riconosce, per esempio, che la superficie di un' anello è *triplicemente connessa*, riducendosi essa ad una *semplicemente connessa* mediante un taglio trasversale, avente principio e termine nel foro infinitesimo da imaginarsi nella superficie, ed un secondo taglio dall' uno all' altro degli orli del primo. Invece la T imaginata per $w^2-z=0$, ossia un sistema di due strati sferici connessi nella descritta maniera lungo un' arco che dal punto 0 va al punto opposto cioè ∞, si trova essere semplicemente connessa.

Vogliamo infine osservare esser unicamente per brevità e chiarezza che si fece ricorso a superficie sferica e non ad altra qualunque d' egual natura rispetto a connessione, e che la si concepì a contatto del piano o nel punto 0.

funzioni. Ma nella *Dissertazione* anche i teoremi già dati da Cauchy, esposti opportunamente con quelle più circostanziate determinazioni che convengono alla teorica da svilupparsi ed ai sussidi geometrici introdotti, mentre abbracciano affatto similmente insieme il caso di funzioni ad un valore e quello di funzioni a più valori, prendono un significato più preciso e di più pronta applicabilità alla teorica stessa. Per apprezzare nella sua interezza la generalità con cui l'autore stabilisce questi teoremi, non che tutte le speculazioni successive, devesi ben fissare che i dati da lui supposti non sono mai espressioni analitiche, ma soltanto sistemi generalmente continui di valori distribuiti per tutti i punti di una superficie T (di estensione finita o infinita) supposta data (1).

Egli è sul finire del §. 9 che emerge nel suo punto più essenziale la influenza dell'ordine di connessione di una superficie impiegata come luogo rappresentativo nell'analisi delle funzioni. L'integrale quivi considerato preso da un punto fisso O_0 al punto mobile O in T riesce (per semplicità negligendo affatto i casi di discontinuità), quando T sia semplicemente connessa, indipendente dal cammino d'integrazione e dipendente solo dalla posizione di O (2) e può risguardarsi come

(1) Quindi per esempio allorchè dice: *Sia X una funzione di x, y nella superficie T*, si ha recisamente non altro da intendere se non che X ha da avere generalmente in ogni punto di T un determinato valore. La funzione X poi, come d'ordinario, vien detta *continua in* T, od in una sua parte, quando il valor suo vari in modo continuo da punto a punto dappertutto in T, o soltanto in quella sua parte; *discontinua lungo una linea* quando il valore cambi bruscamente passando da punti situati da una banda della linea a punti situati dall'altra; ecc.

(2) Scelto un cammino s_1 da O_0 ad O, qualunque altro s_2 pure da O_0 ad O, preso in direzione contraria, per il che scriveremo $-s_2$, forma con s_1 un cammino rientrante $s_1 - s_2$ che in una superficie *semplicemente* connessa può sempre risguardarsi come *l'intero* contorno di una porzione della medesima. Perciò il considerato integrale preso lungo $s_1 - s_2$ riesce nullo, quindi preso lungo s_1 dà risultato contrario di quello che prendendolo lungo $-s_2$, e risultato identico a quello che si ha prendendolo lungo s_2.

Dire che due cammini costituiscono l'intero contorno di una porzione di superficie semplicemente connessa vale quanto dire che l'uno, rimanendo pur sempre nell'interno di questa porzione, può deformarsi a poco a poco in guisa da ridursi a totale coincidenza coll'altro.

una funzione di x e y avente un solo valore e finita e continua dappertutto in T. Se invece T sarà multiplicemente connessa, l'integrale potrà avere in ogni punto di T una infinità di valori differenti tra loro di multipli interi di certe costanti. Questa infinità di valori si potrà togliere riducendo la T con tagli trasversali in una semplicemente connessa T' (1); ma l'integrale avrà allora in ogni due punti combaciantisi degli orli di ciascun taglio valori differenti tra loro di una quantità finita, che rimarrà costante lungo tutto uno stesso taglio (supposto che nessuno di essi sia stato diviso in porzioni da qualcuno de' tagli fatti dopo) e sarà una delle costanti testè nominate. Il numero di queste costanti o moduli di periodicità (2) eguaglia il numero dei tagli occorrenti ed è quindi $n-1$ per una T $n$uplicemente connessa.

Stabilite ormai quelle cose che avvertiva di dover premettere per rendere più agevoli le proprie ricerche, l'autore passa all'esposizione delle proprietà delle funzioni componenti, cioè delle funzioni u che nella superficie T (3) debbano in generale (vale a dire senza escludere eccezioni per punti e linee singolari) soddisfare l'equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Questa equazione può considerarsi come un caso particolare della

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0,$$

In una superficie multiplicemente connessa siffatta riduzione cessa di essere sempre possibile; come, per esempio, in una superficie circonscritta da due circonferenze concentriche quando le linee s_1 e s_2 comprendano tra loro la circonferenza minore.

(1) Ed obbligando, già s'intende, il punto mobile O a rimanere entro T', cioè a non poter traversare i tagli imaginati.

(2) La espressione *modulo di periodicità*, che cominciammo ad usare sino dalle ricerche del sig. Puiseux, è del sig. Riemann, che però la introduce più tardi e cioè nella *Theorie der Abel'schen Functionen*.

(3) S'intende una T affatto qualunque, sulla quale, ci sia permesso ripeterlo, s'ha da imaginare esistente (deposto) un sistema qualunque di valori varianti da punto a punto in modo da soddisfare la equazione delle funzioni componenti.

alla quale soddisfa il potenziale V nei punti situati fuori della massa a cui si riferisce. Perciò, colla supposizione $z = Costante$, si possono trasportare nel campo delle funzioni u i risultati ottenuti da Gauss nella Memoria *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs-und Abstossungs-Kräfte* (1). Però, sebbene la *Dissertazione* dipenda intimamente, non che per la coincidenza delle equazioni, anche per i modi delle considerazioni da siffatta Memoria, noi ci contenteremo di aver accennata questa dipendenza e proseguiremo l'intrapreso rendiconto della *Dissertazione*.

Alle proprietà generali delle funzioni u sono dedicati i §§. 10 e 11. Ammettendo che la funzione u e le sue derivate prime non abbiano discontinuità lungo una linea, e che, per ogni punto dove possano essere discontinue, colla distanza ρ del punto O dallo stesso, divengano infinitamente piccoli i prodotti $\rho \frac{\partial u}{\partial x}$ e $\rho \frac{\partial u}{\partial y}$; ammettendo in oltre che la superficie T consti d'un solo strato, stabilisce quelle formole fondamentali che esprimono il valore di u in un punto qualunque di T, dove u sia continua, mediante un'integrale formato lungo il contorno di T, od in particolare lungo una circonferenza descritta intorno al detto punto come centro. Può quindi enunciare il teorema, che, nelle condizioni ammesse, la funzione u e le sue derivate sono necessariamente finite e continue per tutti i punti di T (2). Nelle

(1) Memoria contenuta nel volumetto del *Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins* dell' anno 1839 (pubblicato a Lipsia nel 1840), e riprodotta in lingua francese nel tomo 7 del giorn. di Liouville.

Lo studio di questa Memoria sarebbe stato il più idoneo che, per penetrare con minor difficoltà nella *Dissertazione*, avremmo creduto di poter suggerire, se non fossero sopravvenute le pubblicazioni, che indicheremo, dei discepoli del sig. Riemann e di altri benemeriti scrittori.

(2) Qui, come in seguito per w, sono escluse dalla considerazione le discontinuità che possono togliersi mutando il valor della funzione in punti separati. Una discontinuità di questa sorta nascerebbe (per fissar le idee) per la funzione u delle variabili reali x e y

stesse condizioni espone successivamente i seguenti teoremi: Se u e $\frac{\partial u}{\partial p}$ (1) sono nulle in tutti i punti di una linea, u è nulla dappertutto in T; Se i valori di u e $\frac{\partial u}{\partial p}$ sono dati in tutti i punti di una linea, u rimane determinata anche in tutti gli altri punti di T; I punti di T nei qnali u ha uno stesso dato valore formano necessariamente, quando u non è dappertutto costante, linee che separano una parte di superficie dove u ha valori più grandi da un' altra dove ha valori più piccoli.

Terminando col §. 11 la preparatoria esposizione di proprietà delle funzioni componenti, l' autore passa allo studio delle funzioni complete, vale a dire di una qualsiasi quantità complessa $w=u+vi$ che in generale (cioè senza escludere eccezioni in linee o punti singolari) ha per ogni punto O di T un valor determinato il quale varia colla posizione di questo punto in modo da soddisfare alle equazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\ .$$

Principia colla supposizione, e ciò nei §§. 12 e 13, che T sia semplicemente connessa e costituita d' un solo strato. Nel primo di questi paragrafi dimostra il teorema: Se w non ha discontinuità lungo linee, e per un punto qualunque O' di T, dove sia $z=z'$, il prodotto di $z-z'$ per w diviene infinitamente piccolo coll' accostarsi infinitamente di O ad O', la funzione w e tutte le sue derivate sono finite e continne dappertutto in T. Nel secondo, considerando il caso in cui il pro-

qualora un punto della superficie, che nel sistema cartesiano dovesse corrispondere all' equazione $u=u(x,y)$, distaccandosi dalla medesima si portasse a maggiore o minor distanza dal piano delle coordinate x e y.

(1) Già sino dal §. 8 l' autore imagina determinata la posizione dei punti in T anche mediante una porzione s di linea fissa (per lo più il contorno) ed una porzione p della normale alla linea nel termine mobile di s. Ed è in quell' occasione che fissa una volta per sempre in qual direzione debbasi risguardare come crescente la lunghezza della porzione variabile del contorno (*direzione positiva del contorno*).

dotto di w per la prima potenza di $z-z'$, non tenda a zero con questa differenza, dimostra che, se può trovarsi (1) una potenza di $z-z'$ d' esponente finito la quale moltiplicata per w dia un prodotto tendente ancora a zero con $z-z'$ la funzione w sarà tale che, sottraendone una frazione razionale della forma

$$\frac{a_1}{z-z'}+\frac{a_2}{(z-z')^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}},$$

dove $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ designano costanti, si avrà una funzione che rimarrà continua e finita nel punto O'.

Nel §. 14 comincia a far riflettere che i teoremi dei due paragrafi precedenti sussistono generalmente anche quando la superficie T sia composta di più strati. Imperocchè, fissato in una T qualunque un qualsivoglia punto, si può imaginare distaccato dalla medesima un pezzo che comprenda questo punto e che considerato isolatamente sia una superficie ad un solo strato, eccetto solo il caso in cui il punto fissato fosse di diramazione. E pertanto, lasciata in disparte la supposizione che T consti d' un solo strato, esamina questo caso, e conchiude che i teoremi precedenti sussistono egualmente anche quando O' sia punto di diramazione dell' $(n-1)$ esimo ordine, purchè si sostituisca $(z-z')^{\frac{1}{n}}$ a $z-z'$.

Nel §. 15 imagina che la dipendenza fra z ed una funzione $w=u+vi$ di z, avente un valore determinato per ogni punto O della superficie T distesa sul piano A, venga anche rappresentata mediante una superficie S distesa sul piano B. Perciò imagina che ad ogni punto O di T debba corrispondere un punto Q, che occupi al disopra del piano B la posizione determinata dalle coordinate u, v. L' insieme dei punti Q formerà la superficie S (2). Mettendo in evidenza che w non può essere costante lungo una linea senza essere dappertutto costante, può asserire che Q si muoverà sempre, e ge-

(1) Come vedremo, non si potrebbe non trovare, a meno che w fosse dappertutto infinita.

(2) A questa superficie già facemmo allusione come di una trasformata della T.

neralmente in modo continuo, con O. E conchiude insomma, circa la nuova superficie, che il contorno suo corrisponde al contorno di T ed ai siti di discontinuità, e che per essa si verifica la restrizione presupposta originariamente per T nel principiare il §. 5. E la z, avendo per ogni punto Q un valore determinato che al muoversi di Q varia con continuità ed in guisa che $\frac{dz}{dw}$ riesce indipendente dalla direzione del moto, la z dunque risulta *funzione* della variabile complessa w per il campo rappresentato dalla superficie S. Denotando inoltre con O' e Q' due punti corrispondentisi in T ed S nei quali sia $z=z'$ e $w=w'$, coll' avvicinarsi di O a O' tenderà a limite finito il rapporto

$$\frac{w-w'}{z-z'},$$

ogniqualvolta O' e Q' non siano punti di diramazione, ovvero il rapporto

$$\frac{(w-w')^{\frac{1}{n}}}{(z-z')^{\frac{1}{m}}}$$

ogniqualvolta sieno punti di diramazione, O' dell'ordine $(m-1)$esimo e Q' dell' ordine $(n-1)$ esimo.

Nei restanti paragrafi della *Dissertazione* trovasi esposto ed applicato quel *principio*, che l' autore nelle posteriori pubblicazioni intitola da *Dirichlet*.

È questo precisamente lo strumento con cui il sig. Riemann rese possibile più in generale quella determinazione delle funzioni, per mezzo di opportuni sistemi di condizioni strettamente necessarie e sufficienti, la quale, indipendente dal dato di una espressione analitica, permette, come già dicemmo, di trattare le questioni più col puro ragionamento che col calcolo. Il principio di Dirichlet come stromento analitico, al pari delle superficie T come sussidio geometrico, è affatto caratteristico

della teorica delle funzioni professata in Gottinga. Fatta astrazione dall'aspetto più o meno diverso che vengono ad assumere per la indipendenza espressamente dichiarata e mantenuta da ogni supposizione di espressioni analitiche, per l'originalità del sussidio geometrico e dell'intero complesso dei modi di riguardare ed esprimere le proposizioni, e per il posto che vennero ad assumere nel compatto ordinamento creato dal sig. Riemann, i risultamenti *analitici* dati per le funzioni w nei paragrafi precedenti si riscontrano già anche nella scuola di Cauchy (1); mentre dal principio di Dirichlet in avanti cominciano a figurare per esse funzioni risultati veramente nuovi.

Intitolando da Dirichlet il principio in discorso, il sig. Riemann volle con meritato riguardo ricordare che quel profondo analista, mosso probabilmente da un pensiero somigliante di Gauss, soleva dare tal principio nelle proprie lezioni sulle forze agenti in ragione inversa dei quadrati delle distanze. Ma, in attenenza con siffatto principio, Dirichlet non dava alle stampe che il breve articolo *Sur un moyen de vérifier l'expression du potentiel rélatif à une masse quelconque, homogène ou hétérogène* (2), dove faceva vedere che il potenziale può concepirsi determinato, indipendentemente da ogni sua espressione analitica, mediante la nota equazione alle derivate parziali del second' ordine ed alcune condizioni, alle quali soddisfanno il potenziale e le sue prime derivate, e che affermano semplicemente la continuità e la grandezza finita dei valori.

La iniziativa di Dirichlet non toglie che debba parere mirabile la perspicacia del sig. Riemann, che ravvisa la estesa applicabilità di siffatto principio, e che, per poterlo convenientemente introdurre nella teorica generale delle funzioni, deve prendere in considerazione principalmente un caso al quale il

(1) Ci duole di dover però avvertire che, in generale, gli scrittori che presero a divulgare la dottrina del sig. Riemann non manifestarono un' adeguato apprezzamento dei lavori degli altri matematici, e vogliamo dire principalmente di Cauchy.

(2) *Crelle*, tomo 32

principio stesso nella forma semplicissima d' allora non è applicabile; il caso cioè in cui la funzione non rimanga finita e continua dappertutto nella estensione (superficie T) dove sia da considerare, ma debba in certi luoghi diventare infinita od ammettere discontinuità finite. Come per le superficie di rappresentazione, così pel principio di Dirichlet non entreremo in tutti i dettagli occorrenti per darne quel complessivo concetto generale che n' è deposto nella *Dissertazione.* Epperò ci limiteremo, in primo luogo, a dire che il principio sta nel dimostrare che esiste una, ed una sola, funzione soddisfacente a date condizioni, mediante la considerazione di un integrale, il quale, mutando una funzione contenutavi ed obbligata soltanto ad una parte delle condizioni anzidette, deve prendere un valor minimo, e non può prenderlo che per una sola fra tutte le funzioni della contemplata categoria; ed in secondo luogo, a dare un' idea del posto ch' esso principio piglia nella teorica delle funzioni coll' esporre qualcuna delle determinazioni che ne provengono.

Cominciando dal caso più semplice, imaginiamo una T semplicemente connessa. Il principio di Dirichlet insegna, che, se una funzione $w = u + vi$ di z dev' essere finita e continua dappertutto in T, essa rimane in T completamente determinata dati che siano i valori di u lungo il contorno di T (1) ed il valore di v in un solo punto, qualsivoglia, di T. E non soltanto insegna che le dette condizioni non conten-

(1) Per fissare le idee può giovar il concepire che la T (distesa già s' intende sopra A) consti anche di un solo strato, come sarebbe una porzione di piano contornata da una circonferenza, o da una ellisse, ecc. Esprimendo s, come d' ordinario, la lunghezza della porzione variabile di contorno che principia in un punto fisso e termina in un punto mobile, ed σ la lunghezza totale del contorno, si potrà imaginare che i valori di u, da concepirsi distribuiti lungo il contorno, vengano somministrati da una data funzione continua e reale della variabile s, avente per $s=\sigma$ lo stesso valore che per $s=0$.

È forse superfluo l' avvertire che, invece di supporre dati i valori di u, si possono supporre dati quelli di v, ossia che, nel qui considerato come nei successivi sistemi di condizioni determinanti w, si potranno scambiare tra loro quelle che si riferiscono ad u con quelle che si riferiscono a v.

gono *meno* di quanto abbisogni per la determinazione di una funzione; ma che anche non contengono *di più*, vale a dire, che, qualunque sia la successione continua di valori che piaccia di fissare per u lungo il contorno e qualunque sia il valore che vogliasi fissare per v in un punto di T, esiste pur sempre una corrispondente funzione w finita e continua dappertutto in T. Se, per istituire un confronto, si volesse invece concepire determinata la w col supporre dati i suoi valori (il che è quanto dire i valori simultanei di u e v) lungo una linea l tracciata entro T (1): questo complesso di dati eccederebbe il bisogno, e sarebbe quindi anche soggetto all'inconveniente che una parte dei medesimi potrebbe ripugnare all'altra parte. Ed invero, per quanto breve si volesse supporre la linea l, la funzione w rimarrebbe ancora totalmente determinata supponendone dati i valori anche soltanto in una porzione l_1 di l, piccola quanto si vuole purchè finita; epperò i valori di w nella restante porzione $l-l_1$ non potrebbero più prendersi arbitrariamente.

Se, invece di supporre che w debba rimanere finita e continua dappertutto in T, adesso si suppone che debba diventare infinita in alcuni determinati punti, rimanendo dovunque altrove (sempre ben'inteso in T) finita e continua: il principio di Dirichlet insegna, che come *dati sufficienti e non soprabbondanti* per determinare w possono assumersi i seguenti: 1. per ogni punto, dove w debba diventare infinita, una funzione che ivi divenga infinita come w (2); 2. i valori di u lungo il contorno; 3. il valore di v in un punto.

(1) Che ciò basti a determinare w si può, fra i vari modi, desumere da un teorema del §. 15. Se una funzione w_1 pure finita e continua in T avesse in l gli stessi valori di w, la differenza w_1-w sarebbe costante e cioè nulla in l, e quindi nulla dappertutto in T.

(2) Se in un punto, dove il valore di z fosse z' la funzione w dovesse diventare infinita come la frazione razionale

$$\frac{a_1}{z-z'}+\frac{a_2}{(z-z')^2}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{(z-z')^{n-1}};$$

sarebbe questa la funzione che di regola converrebbe supporre data come determinante il modo di comportarsi di w nel detto punto.

Se, per contemplare un caso ancora un po' più generale, si suppone che la T sia multiplicemente connessa, e dicasi T' una semplicemente connessa alla quale la prima si riduca mediante tagli trasversali; e si supponga che w debba diventare infinita in alcuni determinati punti di T, ed avere in ogni due punti combaciantisi degli orli di ciascun taglio valori differenti tra loro di una quantità finita e costante (modulo di periodicità) lungo tutto uno stesso taglio (1): il principio di Dirichlet insegna che come *dati sufficienti e non soprabbondanti* per determinare w possono assumersi i seguenti: 1. per ogni punto, dove w debba diventare infinita, una funzione che ivi divenga infinita come w; 2. per ogni taglio trasversale la parte reale della differenza costante su nominata; 3. i valori di u lungo il contorno (di T); 4. il valore di v in un punto.

Se la superficie T fosse illimitata ossia, concependola come una superficie chiusa, fosse composta di strati sferici completi; allora, per rendere ad essa applicabili le dianzi esposte determinazioni di w, basterà imaginare (come dicemmo) che dalla medesima si stacchi un punto od elemento infinitesimo, e considerare la linea infinitesima del distacco come il contorno della superficie. In tal caso pertanto il dato dei valori di u lungo il contorno di T riducesi semplicemente a quello del valore di u nella linea infinitesima o punto suddetto. E riunendo questo dato con quello relativo a v, si potrà in loro vece enunciare nelle precedenti determinazioni l'unico dato (complesso) del valore di w in un punto (ancora, s'intende, qualsivoglia) di T.

Trascorsa di poco la pubblicazione della *Dissertazione*, il sig. Riemann somministra splendida prova della fecondità dei

(1) Dal già detto intorno alla *Dissertazione* ed alle ricerche del sig. Puiseux si riconoscerà che gli integrali delle funzioni algebriche presentano precisamente coteste circostanze. Essi danno luogo a considerare anche altre discontinuità, pure lungo linee; ma qui basti l'accennare che queste discontinuità vengono in considerazione quando gli integrali ossia la funzione w debba diventare infinita anche logaritmicamente, vale a dire non puramente come una funzione algebrica, ma eziandio come una funzione logaritmica.

principi in essa deposti facendone applicazione al grandioso argomento delle trascendenti abeliane le più generali. Prende queste trascendenti per soggetto delle proprie lezioni nel 1855-56 e stampa la teorica, che ne vien componendo, nel tomo 54 del giorn. di Crelle-Borchardt, premettendole tre articoli (1) riassumenti in forma alcun poco variata i principi su nominati. Non ci proporremo di dare qui una circostanziata idea del contenuto di questa celebre Memoria; perchè saremmo condotti a sorpassare forse di troppo le proporzioni adatte a queste *Notizie*, e perchè dovremmo per una parte impegnarci a dire troppo imperfettamente di ricerche che vanno tra le più ardue dell' algebra moderna ed aspettano altre profonde investigazioni per poter essere incontrastabilmente e largamente usufruttate pel progresso della teorica in discorso. E però entreremo in qualche particolare solo per quanto bisogna a mettere in chiaro come vengano dall'autore introdotti nella medesima i principi ed i mezzi suoi caratteristici.

Principiando colla supposizione di avere la radice s di una equazione algebrica irriducibile del grado n i cui coefficienti sieno funzioni intere di z del grado m, imagina una superficie T che rappresenti la dipendenza della funzione s dalla variabile z, superficie ad n strati distesa illimitatamente sul piano di z ma da concepirsi come chiusa; e ricorda in qual maniera si comportino rispetto a T le funzioni razionali di s e z, e gli integrali di siffatte funzioni.

Ciò premesso, abbandona affatto la supposizione che sia data una espressione analitica e propriamente un' equazione d' onde debbano scaturire le funzioni da considerarsi, ed invece imagina che sia data una superficie T ad n strati distesa

(1) *Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschräukt veränderlicher Grössen*. Pag. 101.

Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialen. Pag. 105.

Bestimmung einer Function einer veränderlichen complexen Grösse durch Grenz-und Unstetigkeitsbedingungen. Pag. 111.

illimitatamente sul piano di z ma da risguardarsi come chiusa, di cui indica con $2p+1$ l'ordine di connessione necessariamente dispari; e fa vedere, col principio di Dirichlet, che (conformemente a ciò che già accennammo) una funzione ω, la quale debba comportarsi rispetto a T nel modo delle funzioni imaginate in prima, riesce determinata sino ad una costante additiva col dato della superficie T, coi dati di espressioni che debbano diventare infinite negli stessi punti e nello stesso modo di essa, e coi dati di quelle costanti che individuano le discontinuità che la funzione può presentare lungo certe linee. Può quindi intraprendere uno studio delle funzioni ω imaginandole determinate per mezzo di sistemi di dati del genere ora dichiarato.

Distingue siffatte funzioni in tre specie: funzioni ω finite dappertutto in T; funzioni ω che in alcuni punti divengono *algebricamente* infinite; funzioni ω che divengono *logaritmicamente infinite*; la qual distinzione equivale alla già introdotta da Legendre degli integrali di prima, seconda e terza specie. Mostra che tutte le funzioni della prima specie possono esprimersi linearmente con p fra esse, le quali possono scegliersi in infinite maniere (bastando che non sieno tra loro legate da alcuna equazione lineare a coefficienti costanti) e vengono poi utilizzate anche nello esprimere e studiare le funzioni di seconda e terza specie.

Fa vedere che una funzione di seconda specie obbligata a diventare infinita del primo ordine in m punti di T ed a rimanere continua dappertutto altrove (o ciò ch' è lo stesso ad avere i moduli di periodicità tutti nulli) contiene ancora $2m-p+1$ costanti arbitrarie, e che una siffatta funzione è radice di una equazione algebrica del grado n i cui coefficienti sono funzioni intere di z del grado m. Da qui emerge tosto che tutte quante le funzioni ω sono o funzioni algebriche diramate a modo della T od integrali di queste funzioni. Ed ecco quindi assicurata per le funzioni algebriche e loro integrali una determinazione indipendente da espressioni analitiche e cioè richiedente soltanto un sistema di dati della natura sopra dichiarata.

Spiegata questa preparazione contenuta nei primi cinque paragrafi, ci contenteremo pei restanti di dire ciò che dice l'autore nel preambolo, che: nei §§. 6-10 trattasi delle espressioni razionali delle dette funzioni per mezzo di due variabili legate da una equazione algebrica; nei §§. 11-13 trattasi della trasformazione di queste espressioni mediante sostituzioni razionali; nei §§. 14-16, ultimi della parte prima, a preparazione della parte seconda, è trattata l'applicazione del teorema abeliano all'integrazione del sistema di equazioni differenziali che è nel presente campo come il sistema preso in considerazione da Jacobi nel campo delle trascendenti iperellittiche; e finalmente nella parte seconda, come ebbimo già a dire, trattasi della risoluzione del problema d'inversione degli integrali mediante l'impiego della serie ϑ, il qual problema è però considerato dall'autore sotto aspetto variato da quello di Jacobi (1).

Passiamo infine ad indicare brevemente le pubblicazioni fatte dai discepoli del sig. Riemann e da altri benemeriti scrittori, senza delle quali sì la *Theorie der Abel'schen Functionen* che gli elementi generali esposti nella *Dissertazione* (2) sarebbero rimasti per più lungo tempo di difficilissimo accesso.

(1) Il sig. Betti pubblicava nel 1863 (*Annali delle Università Toscane*, tomo 7) una Memoria *Sopra le funzioni algebriche di una variabile complessa* in strettissima relazione con parte del lavoro del sig. Riemann; ma, non essendo entrati in bastanti particolari su questo lavoro dobbiamo per adesso contentarci di avere indicato il titolo di essa Memoria.

Coglieremo quest'occasione per segnalare *La teorica delle funzioni ellittiche* dallo stesso illustre professore esposta nelle lezioni di *Analisi superiore* date nell'Università di Pisa durante l'anno scolastico 1859-60 stampata nei tomi 3 e 4 degli *Annali di matem.*, nella quale riscontransi in tutto lo spirito moderno gli elementi di una teorica generale delle funzioni monodrome.

(2) Ci piace ritornare a questi elementi generali per dire (ciò che già abbiamo lasciato intendere) potersi dalle pubblicazioni di cui siamo per dare notizia chiaramente riconoscere come il sig. Riemann andasse modificando e cioè semplificando ed estendendo sempre più la primitiva trattazione. Così, per esempio, può rilevarsi la maggiore semplicità di alcune dimostrazioni *riferentisi* specialmente a suoi luoghi rappresentativi; e lo stabilire le proprietà fondamentali delle funzioni di una variabile complessa immediatamente coll'equazione

$$\frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x},$$

Il sig. Gustavo Roch, suo discepolo, compendia in una Memoria per la *Zeitschrift für Math. u. Physik* (1) i punti principali della di lui dottrina generale. Ma questa dottrina essendo stata il suo primo alimento e per la svegliatezza dell' ingegno essendosela fatta familiare facilmente, egli non misura tutta la difficoltà che altri deve incontrare; e però la sua Memoria, pur sempre preziosa, non è in ogni punto abbastanza circostanziata e chiara per chicchessia. Oltre di questo diede e continua a dare in luce altri pregevolissimi scritti, dei quali non entreremo qui in particolare discorso, ma non ommetteremo la precisa indicazione, siccome tutti legati colla dottrina riemanniana (2).

anzichè stabilire in prima le proprietà fondamentali delle funzioni (componenti) che soddisfanno l' equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

I meriti del sig. Riemann rispetto agli elementi della teorica generale delle funzioni sono, a nostro avviso, tanto notabili che sarebbeglisi dovuto assegnare posto assai distinto tra gli analisti, ancorchè non avesse tosto compito sì grandi passi nel campo delle trascendenti abeliane. Crediamo che sia veramente da ammirare quella potenza assimilatrice colla quale seppe raccogliere e fondere in una teorica compatta semplice e generale, insieme colle proprie, tutte le ricerche altrui che vi avevano attenenza importante; delle quali specialmente le molte dovute a Cauchy, sparse, come indicammo, in numerose pubblicazioni, erano state condotte con svariati intendimenti, oltre che giacevano avvolte in una varietà eterogenea di nomi e di notazioni speciali. Degnissimo di osservazione è anche in particolare lo stabilire ch' egli fa sempre le proprie convenzioni e definizioni in modo che ogni teorema si possa enunciare come vero senza eccezione, o che si possano riunire in una sola formola o teorema parecchie formole o teoremi d' ordinario considerati come diversi l' uno dall' altro (per un esempio additeremo il §. 2 della *Th. d. Abel'schen Funct*).

(1) La Memoria ha per titolo *Ueber Functionen complexer Grössen* ed è contenuta nelle annate 8 e 10 (1863 e 1865) del citato giornale, che i sigg. Schlömilch, Kahl e Cantor pubblicano in Lipsia.

(2) *Anwendung der Potentialausdrücke auf die Theorie der molecular-physikalischen Fernwirkungen und der Bewegung der Elektricität in Leitern*; dissertazione inaugurale stampata in Gottinga e poscia con alcune modificazioni nel tomo 61 del giorn. di Crelle-Borchardt. *De theoremate quodam circa functiones Abelianas*; dissertazione scritta per ottenere nel 1863 la facoltà d' insegnare nella Università di Halle e stampata a Lipsia nella tipog. Teubner. *Ueber eine Transformation des Potentials*; tomo 63 del giorn. di Crelle-Borchardt *Ueber die Anzahl der willkührlichen Constanten in algebraischen Functionen*; tomo 64 del giorn. di Crelle-Borchardt. *Ueber die Ausdrücke elliptischer Integrale 2 und 3 Gattung durch 9-Functionen*; annata 10 della su citata *Zeitschrift*.

Il sig. Federico Prym, altro discepolo del sig. Riemann, pubblica nel 1863 come dissertazione inaugurale (1) ed un'anno dopo riproduce considerabilmente accresciuta (2) la trattazione delle trascendenti iperellittiche del prim'ordine secondo i modi adoperati dal maestro nella *Theorie der Abel'schen Functionen.* E pertanto la Memoria del sig. Prym, sebbene non dovunque inappuntabile, offre una utilissima preparazione allo studio di questa *Theorie*; e, svolgendo largamente nel relativo caso particolare la materia dei due ultimi paragrafi della stessa (cioè la conclusione del problema d' inversione vale a dire la effettiva rappresentazione di funzioni algebriche del limite variabile degli integrali mediante funzioni ϑ i cui argomenti sono gli integrali stessi), offre anche notabili risultati originali, terminando con un cenno relativo ai medesimi per le funzioni iperellittiche di ordine qualunque, su di che l'autore si riserba di dare in luce quanto prima espressamente un nuovo scritto.

Nella *Zeitschrift* su citata si trovano, parte indicati e parte stampati a pieno, anche lavori di un terzo distinto discepolo del sig. Riemann, cioè del sig. Ermanno Hankel. Quelli specialmente attenenti al nostro argomento sono i due ultimi, e trovansi nell' annata 9 (1864) (3).

Nel 1864 compare l'opera del sig. Durège: *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse (mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet)*, a comporre la quale l' autore dichiara d' essersi valso tanto delle Memorie stampate che delle lezioni date in Gottinga (di cui ebbe sunti in iscritto) dal sig. Riemann, non che delle Memorie dei sigg. Prym e Roch. Premette una introduzione dove leggonsi volontieri le considerazioni giustificative dei nu-

(1) *Theoria nova functionum ultraellipticarum. Pars prior.* Berlino, tipog. di G. Schade.

(2) *Neue Theorie der ultraelliptischen Functionen.* Stampata (e può anche aversi separatamente) nel tomo 24 delle *Denkschriften* della classe di scienze mat. e nat. dell'Ac. di Vienna.

(3) *Die Eulerschen Integrale bei unbeschränkter Variabilät des Argumentes. Die Zerlegung algebraischer Functionen in Partialbrüche nach den Principien der complexen Functionentheorie.*

meri complessi; stabilisce il concetto di funzione d' una variabile complessa e quello delle superficie riemanniane; espone i soliti teoremi fondamentali sugli integrali con variabili complesse, le proprietà generali delle funzioni; la riduzione delle superficie a semplicemente connesse; le considerazioni sui moduli di periodicità, prendendo poi come esempi il logaritmo, gli integrali circolari e l' integrale ellittico di prima specie, dei quali presenta la inversione, senza poi spingersi addentro nella teorica delle funzioni ellittiche. Espone il principio di Dirichlet, ed infine le relazioni fra l' ordine di connessione di una superficie, il numero dei punti di semplice diramazione ed il numero dei giri del contorno od il numero degli strati se la superficie si chiuda all' infinito.

Infine nel 1865 il sig. Neumann, nello stesso intento del sig. Durège, di rendere cioè accessibile a chicchessia senz' altra preparazione la dottrina riemanniana, dà in luce le *Vorlesungen ueber Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale.* Quest' opera, oltre la maggior parte di ciò ch' è dato nell' opera del sig. Durège, toltone però affatto il principio di Dirichlet, contiene la completa risoluzione del problema d' inversione (1) degli integrali iperellittici di ordine qualunque. Sebbene non devii sempre opportunamente dalle considerazioni presentate dal sig. Riemann, muti senza buona ragione parecchie lettere e notazioni e nomi dal medesimo già portati in uso, e col desiderio di rimediare alla eccessiva concisione dell' illustre maestro trascorra nel diffetto opposto cioè in una prolissità talvolta assai nojosa: tuttavia sono tante le felici originali innovazioni contenute in questo lavoro, e per esso viene così incontrastabilmente spianata ogni difficoltà all' apprendimento della dottrina riemanniana, che non si può a meno di assegnargli il primo posto fra quelli fino ad ora comparsi a divulgamento di tale dottrina. Noteremo che per esso viene alquanto ri-

(1) Considerato distintamente e nel senso di Jacobi ed in quello più particolare del sig. Riemann.

mosso il bisogno del principio di Dirichlet, riuscendone affatto indipendente anche la inversione degli integrali iperellittici; che nell' impiego delle funzioni ϑ trovasi riparato qualche manco riconoscibile nella *Theorie*; che vi si vedono assai opportunamente distinte dalle altre e considerate a parte le discontinuità di una funzione (sia w) che più non esistono nella reciproca $\left(\frac{1}{w}\right)$ (1); e finalmente che l' idea delle superficie riemanniane e le questioni che ad esse più particolarmente si riferiscono vi sono svolte con tanta chiarezza e rigore da soddisfare, a nostro avviso, qualunque desiderio (2). Il principio di Dirichlet, lasciato in disparte nelle *Vorlesungen*, forma l' oggetto dell' opuscolo *Das Dirichlet'sche Princip in seiner Anwendung auf die Riemann'schen Flächen* pubblicato dallo stesso autore pure nel 1865 (3).

(1) Noi pure abbiamo a riconoscere la opportunità di stabilire siffatta distinzione, se non che credemmo più conveniente di qualificare come *infiniti* gli accidenti qualificati dal sig. Neumann come *discontinuità polari*. Si potrebbe dire essere specialmente per non aver stabilita questa distinzione che i sigg. Briot e Bouquet incorsero in quelle inesattezze alle quali già facemmo allusione, e che v' incorsero i sigg. Roch e Durège, e che non può dirsene affatto esente la stessa *Dissertazione* riemanniana.

(2) Relativamente a questa parte il libro del sig. Durège non riusciva così utile quanto in generale per le altre. Nelle nostre lezioni ci eravamo quindi studiati di presentarne un migliore svolgimento; per far concepire facilmente le superficie riemanniane eravamo venuti a un dipresso nelle stesse considerazioni del sig. Neumann.

(3) Nel 1863 l' autore pubblicava un cenno dei risultati contenuti nell' ultima parte delle *Vorlesungen* intitolato *Die Umkehrung der Abel'schen Integrale*.

SEZIONE PRIMA

OPERAZIONI ARITMETICHE E FORMOLE SEMPLICI CHE LORO CORRISPONDONO

CAPITOLO PRIMO

Operazioni aritmetiche.
Estensione dell' idea di numero e quindi anche delle operazioni.
Continuità.

§. 1. Primo materiale dell' aritmetica può dirsi la serie dei numeri interi

(1) $1, 2, 3, \ldots$

la quale si può continuare indefinitamente. L' aggiunta dell' unità ad un numero dato od, in altri termini, il passaggio di un numero al successivo della serie (1) è la più semplice operazione che si possa concepire, ed è il fondamento di qualsiasi altra operazione.

Se questa operazione od aggiunta si fa b volte di seguito al numero a si ottiene quel numero c che si chiama *somma* di a e b e che si esprime colla scrittura:

$$c = a + b$$

Se si considera il complesso di queste b operazioni fondamentali (tutte identiche fra loro) come un' operazione unica (composta) si ha l' *addizione*; per effettuare la quale si stabilirono regole opportune che conducono al ritrovamento della somma assai più speditamente che non la pura ripetizione della operazione fondamentale.

Volendo disfare l' addizione, ossia volendo ritornare dalla conoscenza della somma c e di uno dei termini a o b alla conoscenza dell' altro termine, si ha da eseguire un' operazione inversa della precedente. E siccome è

$$a + b = b + a ,$$

l' indole della ricerca non muta sia che ritengansi come dati c ed a, ovvero c e b; cioè l' addizione ammette una sola operazione inversa, detta *sottrazione*, il cui risultato dicesi *differenza* tra la somma e il termine dato, e si esprime colla scrittura

$$b = c - a \quad \text{ovvero} \quad a = c - b .$$

Ripetendo l' addizione, e propriamente supponendo che nella relazione

$$a + b = c$$

il numero b sia pure una somma $a + h$, nella quale h sia una somma $a+k$, e così via sino ad un' ultima somma $a+a$: si ottiene quel numero c che dicesi *prodotto* di a per b (essendo b il numero delle volte che a entra a comporre il risultato) e che si esprime colla scrittura

$$c = ab .$$

Se si considera il complesso di queste ripetute addizioni come un' operazione unica, si ha la *moltiplicazione*, per la quale tornò pure opportuno di stabilire regole speciali.

Volendo disfare la moltiplicazione, ossia volendo ritornare dalla conoscenza del prodotto c e di uno dei fattori a o b, alla conoscenza dell' altro fattore, si ha da eseguire una operazione inversa. Essendo

$$ab = ba$$

si ha una sola operazione inversa, detta *divisione*, il cui risultato (b ovvero a) dicesi *quoziente* del dividendo c pel divisore a ovvero b, e si esprime colla scrittura

$$b = \frac{c}{a} \qquad \text{ovvero} \qquad a = \frac{c}{b}.$$

Dalla ripetizione della moltiplicazione, e propriamente dal supporre che nella relazione

$$ab = c$$

b sia un prodotto ah, in cui $h = ak$, e così via sino ad un ultimo prodotto aa: si ottiene quel numero c che dicesi *potenza b esima di a* (ove b esprima il numero delle volte che a è preso come fattore), e che si esprime colla scrittura

$$c = a^b.$$

Considerando il complesso di queste ripetute moltiplicazioni come un' operazione unica, si ha la *elevazione a potenza*, per la quale furono espressamente stabilite regole opportune.

A divario dai due casi precedenti, qui non è più

$$a^b = b^a,$$

e perciò l' elevazione a potenza dà luogo a due operazioni inverse. Data la potenza c e l' esponente b trovare la base a è l' operazione chiamata *estrazione di radice*; il cui risultato fu detto *radice b esima di c* ed espresso colla scrittura

$$\sqrt[b]{c}.$$

Dati invece c ed a trovare b è l'operazione chiamata *estrazione di logaritmo*, il cui risultato si esprime colla scrittura $\text{Log}_a c$ (od altra poco dissimile) e si pronuncia *logaritmo di c a base a.*

Dall' elevazione a potenza, come già dall' operazione fondamentale e dall' addizione e dalla moltiplicazione, si potrebbe passare ad una nuova operazione col supporre che nella

$$a^b = c$$

sia $b = a^h$, $h = a^k$, e così via sino ad un' ultima potenza $a.^a$

Si otterrebbe un risultato che potrebbe rappresentarsi con

$$a^{(b)} = c$$

ove b esprima il numero delle volte che a figura e come base e successivamente poi come esponente. Questa nuova operazione potrebbe dare origine a due nuove operazioni inverse, e condurre inoltre essa pure colla stessa legge di ripetizione ad una successiva nuova operazione diretta e così via. Queste operazioni dirette, e quindi le inverse, pel modo di loro generazione sarebbero in numero indefinito. Ma, non tenuto conto di qualche tenue lavoro sulla quarta operazione diretta e le sue inverse, si può dire che la speculazione matematica non si è finora applicata che all' addizione, alla moltiplicazione, all' elevazione a potenza, ed alle loro quattro operazioni inverse.

§. 2. Fra le operazioni dirette e le inverse notiamo subito questo divario: che mentre le prime si possono sempre eseguire, qualunque sieno i due numeri a e b della serie

(1) $$1, 2, 3, \ldots .$$

che vogliansi supporre dati, non sempre si possono eseguire le seconde. Per le prime esiste sempre nella serie (1) quel numero che ne sarebbe il risultato, per le seconde non sempre. Così, per esempio, non esistono nella serie (1) numeri che sieno i risultati richiesti dalle scritture;

$$3-5\,,\quad \frac{7}{5}\,,\quad \sqrt[3]{10}\qquad \mathrm{Log}_2 5.$$

La non esistenza od, in altri termini, la impossibilità di questi risultati non proviene però dal concetto stesso delle operazioni inverse, ma soltanto dalla deficienza di opportuni enti aritmetici nel materiale o serie (1) di cui esclusivamente si vuole servirsi. Si potranno quindi rendere possibili in ogni caso anche i risultati delle operazioni inverse coll' arricchire di nuovi enti la primitiva serie dei numeri. Quali siano gli enti aritmetici da introdursi devono dirlo appunto le operazioni inverse medesime; le quali mostrandone la necessità ne porgeranno nel tempo stesso la definizione.

Non vogliamo entrare in troppi particolari propri di un trattato d'aritmetica generale, esponendo con ordine e minutamente come siasi a poco a poco effettuata la introduzione dei nuovi enti aritmetici ed insieme ampliata la primitiva definizione d'ogni operazione; ma ci contentiamo di quel poco ch'è necessario per condurre a risguardare le operazioni e tutti gli elementi che formano il materiale dell'aritmetica da un'unico punto di vista, d'onde si vegga poi anche chiaramente come si compongano tutti quanti i materiali dell'analisi algebrica ed infinitesimale; e di stabilire con saldezza quei punti sui quali dovremo in seguito principalmente appoggiarci.

Estendiamo la definizione di *numero* a comprendere tutte le nuove specie di enti aritmetici di mano in mano introdotte. Questa estensione non è capricciosa, ma suggerita dalla analogia riconosciuta fra coteste varie specie di enti aritmetici; essa permette di porre sovente una sola proposizione in luogo di tante quante fossero le specie che si volessero considerare separatamente.

Per fissare un po' più le idee circa la possibilità d'introdurre di mano in mano queste altre specie di numeri prendiamo a considerare, per esempio, la prima delle operazioni inverse. Trattisi di sottrarre il numero 5 dal numero 3. Chi non conosce o non volesse conoscere altri numeri fuorchè quelli della serie (1) certamente dovrebbe dire impossibile il risultato di tale operazione. Ma questa impossibilità non da altro appunto proviene che dall'essere la serie (1) illimitata nel solo senso dei numeri crescenti. Servendoci di una rappresentazione geometrica, immaginiamo i numeri (1) rappresentati nel loro ordine naturale da punti situati ad eguali distanze tra loro sopra una linea retta; l'operazione fondamentale, cioè l'aggiunta di un unità, equivarrà in tal caso ad un passo fatto dall'un punto al susseguente. Ora quale impossibilità nella domanda di compiere cinque passi a partire dal punto o numero 3 nel senso dei numeri decrescenti? I passi si possono compiere, ed il punto a cui si vorrebbe arrivare esiste, soltanto non evvi un ente aritme-

tico o numero che lo denoti. Ecco dunque sorgere l' idea di nuovi segni, dello zero cioè e dei numeri negativi, per i quali la serie (1) divenga illimitata in entrambi i sensi. Effettuata questa estensione della primitiva serie numerica, viene ad essere esteso non solo il dominio della sottrazione ma eziandio di tutte le altre operazioni, alle quali si potranno assoggettare oltre i numeri positivi anche i negativi.

La divisione porta ad introdurre i numeri fratti positivi e negativi, ossia a concepire nella rappresentazione geometrica addottata gli intervalli fra i numeri interi divisi ciascuno in due, tre, quattro ecc. parti eguali. Questa interpolazione permette di concepire che i punti rappresentativi si succedano ad intervalli minori di un qualunque intervallo fissato, ossia tendano a formare non già una punteggiata, ma una linea continua.

Le estrazioni di radice e di logaritmo portano ad introdurre i numeri irrazionali reali e complessi (*).

(*) La ragion d'essere dei numeri negativi, fratti, irrazionali reali e complessi non va dunque, lo ripetiamo, cercata in qualche cosa di estraneo all' aritmetica pura, ma semplicemente nelle loro definizioni, quali inevitabilmente si presentano allorchè voglionsi rendere possibili in ogni caso le operazioni aritmetiche inverse. La creazione di nuovi enti aritmetici per via di definizione non incontra altra limitazione, in quanto a possibilità, se non questa che la definizione non involga contraddizione. Quella teorica qualunque, che con elementi bene definiti e con deduzioni rigorose venisse costruita, sarebbe *aritmeticamente* inappuntabile, sia che avesse da prestare servigi, e quindi in certo modo trovare conferma, nell' ordine concreto, sia che rimanesse totalmente confinata nel dominio delle astrazioni. Nell' ordine concreto la comparsa di un' ente aritmetico potrà essere segno di assurdità in una questione da risolvere, ma ciò unicamente perchè l' ente aritmetico non sia della specie voluta dall' indole concreta della questione istessa. A questo proposito si leggeranno forse volontieri le spiegazioni che il sig. Durège presenta nella introduzione a' suoi *Elem. der Theor. der Funct.* e che qui riproduciamo « Sebbene il puro concetto dei numeri negativi non involga alcuna impossibilità, può tuttavia avvenire che la comparsa dei medesimi annunzi l' impossibilità od insolubilità di un problema, allorquando cioè la natura del problema esiga necessariamente numeri positivi. Sia, per esempio, proposto il problema: ripartire 6 palle in due urne di guisa che nell' una se ne trovino 8 più che nell' altra. In questo si comprende il problema puramente aritmetico seguente: trovare due numeri, dei quali la somma sia 6 e la differenza 8. E però se altro non si esigesse se non che questi numeri fossero enti aritmetici, senza prefissare di qual specie, e se si fosse già stabilita mediante definizione la esistenza aritmetica dei numeri negativi, la soluzione del problema si offrirebbe tosto, com' è ovvio, nei numeri 7 e —1. Ma per questo non cessa di essere insolubile il problema concreto proposto in prima, richiedendo esso essenzialmente numeri

Ricordiamo che anche non tenuto conto dei numeri complessi la interpolazione irrazionale non rientra, in termini concepibili,

positivi. Ora se la impossibilità non fosse affatto manifesta a priori, essa verrebbe annunziata dalla comparsa del numero negativo — 1. Le stessissime circostanze si riproducono in ogni altra operazione inversa. La operazione inversa che succede alla sottrazione è la divisione. Proponendosi il problema di dividere per un dato intero un' altro intero che non sia multiplo del primo, si presenta la impossibilità di risolverlo con numeri interi positivi o negativi. Il progresso della scienza esige dunque di nuovo che si renda possibile la risoluzione del problema introducendo con opportuna definizione gli enti a ciò necessari; vale a dire i numeri fratti. Ma qui pure può accadere che la comparsa dei medesimi annunzi la insolubilità di un problema, e cioè ancora quando la natura di esso non ammetta come soluzione questi nuovi enti. Serva d' esempio il seguente problema; Con una ruota, di una macchina, munita di 100 denti e faciente un giro al minuto si vuol muovere immediatamente un' altra ruota di guisa che compia 12 giri al minuto; si domanda quanti denti devonsi dare a questa ruota. Il problema puramente aritmetico, che qui si contiene, sta nel dividere 100 per 12, e se sia già precedentemente stabilito il concetto aritmetico dei numeri fratti, la soluzione non presenta difficoltà e travasi espressa nella frazione $8 + {}^1/_3$. La comparsa di questa frazione mostra però in pari tempo la impossibilità di risolvere il problema concreto, dovendo il numero dei denti essere intero. La terza operazione inversa è l' estrazione di radice. Trovare una radice $n$esima (n numero intero) di a è questione non più risolvibile con numeri interi o fratti (razionali), tostochè a non sia la $n$esima potenza d' uno di siffatti numeri. In questo caso adunque sorge di nuovo la necessità di rendere solubile la questione mediante la introduzione di nuove idee. Se a sia positivo ovvero, se negativo sia dispari n, le nuove idee da introdursi sono i numeri irrazionali; se poi a sia negativo ed n pari le nuove idee sono i numeri complessi. Nè vi ha alcuna impossibilità di stabilire quest' ultime idee, come non ve n' ha alcuna nello stabilire quelle dei numeri irrazionali, ed antecedentemente quelle dei razionali fratti e dei negativi; poichè nessuna delle definizioni da porsi involge contraddizione. Se questa potesse aver luogo, se si compendiassero insieme proprietà delle quali si potesse dimostrare che non possono coesistere, allora si che si avrebbe a fare con qualche cosa d' impossibile. Gauss (Sua dissertazione inaugurale, pag. 4, nota) adduce come esempio di una simile impossibilità un triangolo piano rettilineo rettangolo ed equilatero . . . . Ora se già la comparsa di numeri negativi o fratti significa talvolta impossibilità di un problema, è ovvio il comprendere come ciò possa anche essere significato da numeri complessi, come nell' esempio che segue: Dividere una retta di lunghezza 2 in due parti tali che il rettangolo con esse formabile abbia per area 4. Aritmeticamente questo problema vale: trovare due numeri dei quali la somma sia 2 e il prodotto 4. Se esigasi soltanto che questi numeri siano enti aritmetici, senza prefissare di qual specie, e se sia già stabilito il concetto aritmetico dei numeri complessi, la soluzione non presenta difficoltà. Essa conduce alla risoluzione dell' equazione $x^2-2x+4=0$, le cui radici sono i numeri complessi $1+\sqrt{-3}$, $1-\sqrt{-3}$. Ma se invece si voglia avere riguardo al problema concreto, nel quale i numeri cercati devono esprimere le misure delle due porzioni della retta data e devono quindi essere reali, allora il problema devesi riconoscere come impossibile. Il massimo rettangolo formabile colle due porzioni di una retta di lunghezza 2 ha per area 1, la impossibilità del problema viene qui annunziata dalla comparsa di numeri complessi.

nella interpolazione razionale. La differenza $\frac{1}{n}$ della progressione

$$\ldots,-\frac{2}{n},-\frac{1}{n},0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\ldots,$$

fra due termini prossimi consecutivi della quale cade un irrazionale qualunque, può bensì concepirsi tanto piccola che questo irrazionale differisca dai termini anzidetti meno di qualunque grandezza data piccola quanto si vuole, ma, finchè n rimane concepibile ossia finito, la coincidenza dell' un d' essi coll' irrazionale non può in generale aver luogo; ossia, riferendoci alla rappresentazione geometrica, si può bensì concepire gl' intervalli dei punti rappresentativi degli interi divisi in numero ognor crescente di parti eguali, sì che due punti di divisione si serrino sempre più addosso al punto rappresentativo di un dato irrazionale, ma non si può in generale concepire una divisione per la quale avesse finalmente luogo la coincidenza. La interpolazione razionale è propriamente una serie indefinita di interpolazioni successive, di quelle interpolazioni che si fanno dividendo gl' intervalli fra gli interi successivamente in due, tre, quattro ecc. parti eguali. Lo stesso è della interpolazione irrazionale: si hanno da considerare le radici seconde, terze, quarte, ecc.; si hanno da considerare sistemi di logaritmi a base successivamente diversa.

§. 3. Per le indicate successive interpolazioni si giunge a poco a poco a conciliare il concetto di una successione di numeri con quel carattere importantissimo, proprio, originale delle grandezze variabili nello spazio e nel tempo, che è la continuità. La continuità di tal guisa introdotta, per così dire, nel dominio dei numeri, costituisce il risultato più importante dell' aritmetica generale. Questo risultato è il fondamento dell' analisi infinitesimale, ossia di tutti i modi più generali ed efficaci della investigazione analitica, ed è la condizione essenziale perchè si possa applicare con generalità la scienza dei numeri allo studio dei fenomeni dell'estenzione e della durata.

Quando per istudiare, per esempio, il moto di un punto si rappresenta con t la misura del tempo che decorre da un istante fisso originario ad un'istante successivo variabile, e con s la misura dell' arco di trajettoria che il punto percorre in questo tempo; evidentemente si suppone che per ogni possibile intervallo di tempo e per ogni possibile porzione di trajettoria esistano numeri atti ad esprimerne le misure; e questo è appunto supporre che in una successione numerica si verifichi quella continuità che si concepisce nelle variazioni delle grandezze proprie dell' estensione e della durata.

Concetto di variabile continua. — Il detto risultato permette di concepire che un numero variabile x passi da un valore a ad un altro b traversando un' infinità di valori cioè tutti i numeri possibili fra a e b, che non hanno fra di essi alcun intervallo o differenza sensibile. Questo modo di variare del numero x che può dirsi corrispondere fedelmente al movimento lineare continuo di un punto nello spazio, dicesi *modo* (di variare) *continuo*. Ed il numero x suolsi chiamare *quantità* o *grandezza variabile continua* o semplicemente *variabile continua*. Il concetto di variabile continua è invocato ad ogni passo nell' analisi pura e nelle sue applicazioni.

§. 4. Venendo ai numeri complessi non si tratta più di un' ulteriore interpolazione nella serie dei numeri reali, ossia di concepire nuovi punti nell' assunta linea rappresentatrice, ma si tratta di estendere il dominio dei numeri da una a due dimensioni, per il che a luogo rappresentativo si assumerà una superficie. I numeri complessi hanno, come vedremo, la notabile proprietà di essere tutti riducibili alla forma

$$x + yi ,$$

essendo x, y numeri reali ed i significando $\sqrt{-1}$. Una delle dimensioni corrisponderà agli innumerevoli valori (cioè tutti quanti i numeri reali) che può assumere x rimanendo costante y; l' altra dimensione agli innumerevoli valori di y.

Anche un numero complesso $x + yi$ è detto *una variabile continua* allorchè possa mutare di valore ed in modo da non la-

sciare alcun intervallo o differenza sensibile tra valori prossimi consecutivi. Se $x+yi$ sia una variabile continua, devono pure esserlo o tutti due i numeri x e y, od uno, rimanendo costante l' altro. Per passare da un valore a ad altro b una variabile continua e reale deve inevitabilmente passare per la determinata successione dei valori reali esistenti fra a e b; mentre una variabile continua e complessa può passare da un dato valore ad altro dato per una infinita varietà di successioni affatto diverse di valori.

Colla introduzione dei numeri complessi le operazioni ricevettero un' ultima e grandiosa estensione. Si volle renderle tutte e sempre effettuabili sopra di questi numeri, come già sui numeri interi, fratti irrazionali, reali, positivi e negativi. In altri termini, si volle estendere il significato delle formole (*)

$$(1) \qquad a+b\ ,\ a-b\ ,\ ab\ ,\ \frac{a}{b}\ ,\ a^b\ ,\ \mathrm{Log}_b\, a$$

a tutti i valori aritmeticamente possibili di a, b.

Di questo problema importa di afferrare saldamente la soluzione. A tale scopo non è necessario nè, come dissimo, noi vorremo indicare tutti e minutamente i passi che di mano in mano si andarono compiendo e coi numeri reali in prima e coi complessi di poi. Una simile completa indicazione costituirebbe già da sola un' ampio trattato; potendosi ben dire che l' algebra dalla sua origine insino ad ora altro appunto non fece che lavorare a stabilire e generalizzare le operazioni ossia le formole semplici (1) che loro corrispondono, a comporre con queste altre ed altre formole, investigando delle medesime e delle loro inverse le proprietà, le relazioni o trasformazioni svariate a cui danno luogo, ed i modi di calcolarne effettivamente i valori. Ci contentiamo adunque di pre-

(*) Compendiamo d' ora innanzi l' estrazione di radice in una sola formola coll' elevazione a potenza, che sia d' ora interpretiamo nella massima generalità per essa imaginata, nella quale come esponente può prendersi qualunque numero.

sentare una completa soluzione del problema con quella concisione che è permessa dal supporre conosciuto ciò che in qualsia trattato d'algebra si può sicuramente trovare. La soluzione che presentiamo, compendiandosi in due sole formole non complicate e nettamente significative, potrà fissarsi con facilità nella memoria ed esservi pronta ad ogni bisogno. Non occorre che ci tratteniamo sulle formole

$$a+b \ , \ a-b \ , \ ab \ , \ \frac{a}{b} \ ;$$

esse hanno un significato unico, ben definito, da tutti conosciuto e concordemente accettato. Restano dunque da considerare le sole due formole

$$a^b \quad , \quad \mathrm{Log}_b\, a \ .$$

§. 5. Per stabilire il loro significato ricorderemo anzitutto alcune proprietà della serie

$$(1) \qquad 1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\ldots\,,$$

di cui per ora indicheremo la somma con $E(z)$.

Per brevità e per facilità di memoria riterremo d'ora innanzi invariabilmente che x ed yi denotino le parti reale ed imaginaria del numero complesso z, e r il *modulo* (*) ossia la radice quadrata positiva di x^2+y^2; e che le stesse relazioni sussistano fra le lettere x, y, z, r quand' anche majuscole od affette da indici. Le lettere x, y adoperate anche senza riferimento a numero complesso vorranno significare *numeri reali*, e la r *numero reale positivo.*

(*) Osservando che il vocabolo *modulo* vien usato in significati assai diversi e che segnatamente nella teorica delle funzioni ellittiche ed abeliane ha un senso fermamente stabilito, il sig. Weierstrass introduce in sua vece la espressione *valor assoluto* (*absoluter Betrog*; vedi *Crelle*, tomo 52, pag. 289) che si troverà scelta tanto più opportunamente in quanto che v'è già l'uso per un numero reale di chiamare valor assoluto ciò che appunto ne sarebbe il modulo. Tuttavia noi seguitiamo l'uso finora più dominante; e per uniformità ed economia di linguaggio adopreremo quindi modulo anche nel caso di numero reale in vece di valor assoluto.

Sebbene la serie (1) per valori complessi di z sia complessa, tuttavia le proprietà che per essa vogliamo ricordare ed ammettere si possono anche risguardare come somministrate, in quanto che immediatamente deducibili, dalla teorica delle serie reali, in virtù della dipendenza semplice e notissima, che pure dobbiamo ricordare, fra la serie (1) e le serie reali aventi per somme $E(x)$, $\cos y$, $\operatorname{sen} y$. Ecco le proprietà.

La serie (1) è convergente per qualunque valor finito di z.

La differenza $E(z') - E(z)$ tende incondizionatamente a zero con $z' - z$.

Esiste sempre un valore, ma uno solo, per x atto a soddisfare la $E(x) = r_0$, essendo r_0 numero dato (e, giusta la convenzione, reale positivo). Perciò la eguaglianza $E(x) = E(x_1)$ equivale a quest' altra $x = x_1$.

La serie (1), ponendovi yi in luogo di z, conduce a considerare le due serie

$$1 - \frac{y^2}{1.2} + \frac{y^4}{1.2.3.4} - \ldots\ldots, \quad y - \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5} - \ldots$$

che parimenti possegono le prime due delle proprietà enunziate. Tutte quante le proprietà di queste due serie possono stabilirsi, com' è noto, indipendentemente dalla loro equivalenza colle funzioni circolari $\cos y$, $\operatorname{sen} y$ (coi quali segni del resto continueremo senz' altro a denotarle); equivalenza che quindi potrebbe anche considerarsi come un corollario della teorica di esse serie. Delle medesime ricordiamo specialmente: Che la somma dei loro quadrati eguaglia l' unità; Che esiste sempre una infinità di valori per y atti a soddisfare le eguaglianze

$$\cos y = \frac{x_0}{r_0}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{y_0}{r_0}$$

o, ciò ch' è lo stesso, a soddisfare la

$$E(yi) = \frac{x_0 + y_0 i}{r_0},$$

i quali si possono concepire provenienti tutti da un solo qua-

lunque fra essi coll' aggiungere al medesimo ad uno per volta tutti gli innumerevoli multipli di 2π. Da questa proprietà discende che la eguaglianza $E(yi) = E(y_1 i)$ equivale a quest' altra $y = y_1 + 2\pi m$, essendo m numero intero arbitrario.

Per la $E(z)$ sussiste il seguente teorema d' addizione

$$E(z + z_1) = E(z)\,E(z_1).$$

Si ha quindi

$$E(z) = E(x)\,E(yi) = E(x)\,[\cos y + i \operatorname{sen} y].$$

Per le esposte proprietà è chiaro che esiste sempre una infinità di valori per z atti a soddisfare la $E(z) = z_0$, e che saranno tutti ottenibili da un solo qualunque fra essi coll' aggiungere al medesimo i multipli di $2\pi i$. Imperocchè quest' eguaglianza, scritta come segue

$$E(x)\,[\cos y + i \operatorname{sen} y] = r_0 \left[\frac{x_0}{r_0} + i\frac{y_0}{r_0}\right],$$

equivale alle:

$$E(x) = r_0\,, \qquad \cos y = \frac{x_0}{r_0}\,,\ \operatorname{sen} y = \frac{y_0}{r_0}\,.$$

La eguaglianza $E(z) = E(z_1)$ equivale pertanto a quest' altra $z = z_1 + 2\pi i m$, essendo m numero intero arbitrario.

Facendo nuovamente riflettere che esiste sempre uno, ma un solo, valore reale per ρ ed una infinità di valori reali per ω, ma equidifferenti di 2π, pei quali un numero (*) z può esprimersi nella seguente forma

$$z = E(\rho + \omega i),$$

stabiliamo che le lettere ρ, ω conservino invariabilmente d' ora innanzi il significato che qui hanno rispetto a z. Si dovranno

(*) Ricordiamo che col vocabolo *numero*, senz' addiettivo, s' ha da intendere un numero affatto qualunque; sì che a significare un numero di specie particolare deve concorrere qualche addiettivo (reale, razionale, intero, ecc.) Parimenti colla espressione *variabile continua* s' ha da intendere un numero variabile in modo continuo senz' altra restrizione; che, quando i suoi valori dovessero essere reali, si direbbe variabile continua reale.

Noteremo infine che l' addiettivo *intero* non s' intende qui adoperato nel senso più esteso usato nella *Teorica dei numeri*.

quindi ricordare siccome invariabilmente stabilite tutte le seguenti relazioni

$$z = x + y\,i = E(\rho + \omega\,i) = E(\rho)\,E(\omega\,i) = E(\rho)(\cos\omega + i \,\mathrm{sen}\,\omega)$$
$$= r\,(\cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega)\;. \qquad (^*)$$

Ogniqualvolta sarà risguardato come noto il valore di z si dovranno pur risguardare come noti i valori di x, y, r, ρ, ω; parte dei quali, se non fissati immediatamente, resteranno fissati in virtù delle relazioni qui esposte. Secondo l'uso chiameremo ω *argomento* di z.

§. 6. Ecco ormai una maniera di stabilire prestamente i significati di

$$a^b\;,\ \mathrm{Log}_b\, a \qquad \text{ovvero} \qquad z^{z_1}\;,\ \mathrm{Log}_{z_1}\, z\;.$$

È notissimo, e quindi inutile darne dimostrazione, che i valori di $z^{\frac{m}{n}}$, m e n esprimendo numeri interi, sono quelli compendiati nella formola

$$z^{\frac{m}{n}} = r^{\frac{m}{n}}\left(\cos\frac{m}{n}\,\omega + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m}{n}\,\omega\right),$$

nella quale s'intende (e s'intenderà anche per qualunque esponente incommensurabile reale) che $r^{\frac{m}{n}}$ denoti soltanto il reale e positivo fra tutti i valori che gli potrebbero spettare e che ω possa assumere tutti i valori espressi dai termini della progressione illimitata

$$\ldots,\omega - 4\pi\,,\,\omega - 2\pi\,,\,\omega\,,\,\omega + 2\pi\,,\,\omega + 4\pi\,,\ldots$$

Se m e n sono primi tra loro, la formola precedente dà n valori diversi per $z^{\frac{m}{n}}$. La formola stessa, riflettendo che è

$$r^{\frac{m}{n}} = E\left(\frac{m}{n}\,\rho\right), \qquad \cos\frac{m}{n}\,\omega + i\,\mathrm{sen}\,\frac{m}{n}\,\omega = E\left(\frac{m}{n}\,\omega i\right),$$

(*) E similmente le $z_1 = E(\rho_1 + \omega_1 i) = r_1(\cos\omega_1 + i\,\mathrm{sen}\,\omega_1)$, $Z = R(\cos\Omega + i\,\mathrm{sen}\,\Omega)$, ecc.

può presentarsi come segue

$$z^{\frac{m}{n}} = E\left(\frac{m}{n}[\rho + \omega i]\right).$$

Se ora si imagina che $\frac{m}{n}$ tenda ad un numero reale qualunque x_1, il secondo membro di questa eguaglianza tenderà a $E(x_1[\rho + \omega i])$; e però, non volendo introdurre salti arbitrari, si deve ammettere che il segno z^{x_1} denoti tutti i valori diversi ricavabili dalla

$$(1) \qquad z^{x_1} = E(x_1[\rho + \omega i])$$

col porre per ω ad uno ad uno tutti i termini della progressione sopra indicata. Il numero dei valori diversi così conseguiti per z^{x_1} sarà finito per x_1 razionale, e propriamente eguale in tal caso al denominatore della frazione irriducibile esprimente x_1, ed infinito per x_1 irrazionale (*).

Stabilito il significato di z^{x_1} rimane da stabilire quello della formola più generale z^{z_1}. Siamo in uno di quei punti che meritano di essere attentamente osservati. Il significato ammesso per z^{x_1} discendeva inevitabilmente da quello di potenza con esponente commensurabile in forza della continuità da conservarsi nella formola z^{x_1} rispetto a variazioni continue nell' esponente. Ma non è così del significato da stabilirsi per z^{z_1}. Però, se a determinare la volontà dell' analista non sembra esservi in tal caso ragione imperativa quanto la precedente, vi ha una norma generale che vuol essere in ogni caso diligentemente osservata, la quale può esprimersi come segue:

(*) Ed invero, perchè i valori della formola precedente corrispondenti a due qualunque valori $\omega + 2\pi m_1$ e $\omega + 2\pi m_2$ dell' argomento potessero essere eguali tra loro, bisognerebbe che fosse

$$x_1 [\rho + \omega + 2\pi m_1] = x_1 [\rho + \omega + 2\pi m_2] + 2\pi m_3,$$

essendo m_3, come m_1 ed m_2, numero intero. Ma allora x_1 dovrebbe essere della forma

$$x_1 = \frac{m_3}{m_1 - m_2}$$

cioè razionale.

Trattandosi di estendere la definizione di una operazione o, ciò ch' è lo stesso, della formola che ne esprime il risultato ad abbracciare altri enti aritmetici, oltre quelli già prima abbracciati, si ha da fare la estensione in modo che continuino a sussistere le proprietà già riconosciute comê le più essenziali nella operazione medesima. Egli è evidente a priori che quanto più poche, semplici, generali e tra loro armonizzanti siano le leggi regolatrici delle combinazioni analitiche, tanto più facile sarà il prenderne e conservarne intera e chiara la cognizione ed il servirsene nelle investigazioni; ed è poi facile il riscontrare nell' avvenuto svolgimento della scienza la effettiva costante osservanza di questa norma. Venendo ormai al nostro caso, la eguaglianza (1) può dirsi esprimere la proprietà più essenziale o caratteristica (*) dell' operazione di elevazione a potenza d' esponente reale qualsiasi. Per conservare adunque questa proprietà anche pel caso di esponente complesso definiremo il significato di z^{z_1} mediante la

(2) $$z^{z_1} = E(z_1[\rho + \omega i]).$$

Fissiamo ora il significato di $\mathrm{Log}_{z_1} z$. Se per estrazione di logaritmo vogliamo sempre senza alcuna restrizione intendere operazione inversa dell' elevazione a potenza, benchè questa sia stata da ultimo si grandemente estesa, determineremo il significato della nostra formola riflettendo che la eguaglianza

$$\mathrm{Log}_{z_1} z = w$$

ha da equivalere completamente a quest' altra

$$z_1^w = z .$$

Questa equivale alla

$$E(w[\rho_1 + \omega_1 i]) = E(\rho + \omega i)$$

(*) La proprietà che più d' ordinario è citata come caratteristica dell' elevazione a potenza, e che trovasi espressa nell' eguaglianza

$$z^{x_1} z^{x_2} = z^{x_1 + x_2} ,$$

può considerarsi come conseguenza della (1), del pari che questa invece potrebbe considerarsi come conseguenza di quella.

ossia alla

$$w[\rho_1 + \omega_1 i] = \rho + \omega i + 2\pi i . m ;$$

quindi, ritenendo $2\pi i m$ già compreso nell' arbitrarietà inerente all' argomento ω, otteniamo per w cioè pel logaritmo il significato espresso da

$$(3) \qquad \mathrm{Log}_{z_1} z = \frac{\rho + \omega i}{\rho_1 + \omega_1 i} .$$

Il secondo membro della (2) cambia cambiando il multiplo di $2\pi i$ contenuto in ω, vale a dire cambiando il valore che può prendersi per ω, e perciò somministra per la potenza una infinità (*semplice*) di valori. Scrivendolo come segue

$$(2)' \qquad z^{z_1} = E(x_1 \rho - y_1 \omega + i[y_1 \rho + x_1 \omega]) ,$$

è chiaro che col valore di ω cambia non soltanto l' argomento $y_1 \rho + x_1 \omega$ della potenza, ma anche il modulo $E(x_1 \rho - y_1 \omega)$, a meno che z_1 fosse reale.

Il secondo membro della (3) somministra pel logaritmo una infinità *doppia* di valori, due essendo i multipli arbitrari di $2\pi i$ in esso contenuti a motivo dei due argomenti ω e ω_1.

Abbiamo determinato il significato delle formole

$$a + b \; , \; a - b \; , \; a b \; , \; \frac{a}{b} \; , \; a^b \; , \; \mathrm{Log}_b\, a$$

per qualunque valore sì reale che complesso delle lettere a e b senza urtare in verun caso d' impossibilità che potesse far presentire la necessità di qualche nuova specie di enti aritmetici oltre i numeri complessi, che in se compendiano tutte le specie di enti aritmetici finora trovati necessari. Ma per questo non resterebbe tuttavia esclusa la possibilità di altre specie di grandezze aritmetiche, e particolarmente potrebbe sorgere il pensiero di andarne in traccia investigando la natura delle operazioni che succederebbero secondo lo stesso modo di generazione alle tre dirette e quattro inverse fin qui considerate. Noi mettiamo in rilievo la possibilità di questo dubbio per avere motivo di riferire l' opinione di Gauss, il quale

terminava la comunicazione fatta nel 1831 all' Accademia di Gottinga circa i numeri complessi (*Notizie* , pag. 63) col seguente periodo : « L' autore si è riservato di trattare con maggior compitezza in avvenire l' argomento ora toccato a vero dire soltanto occasionalmente ed allora verrà data risposta anche alla domanda , perchè le relazioni fra cose , che presentano una moltiplicità di più di due dimensioni , non possano somministrare nuove specie di grandezze ammissibili nell' aritmetica generale ». Non ci consta che il grande matematico sia poi effettivamente ritornato su questo punto (*).

§. 7. Stabilita una generalizzazione, come in particolare abbiamo qui fatto per la potenza ed il logaritmo, è necessario, innanzi proseguire lo sviluppo della scienza conformemente a tale generalizzazione , di esaminare dal punto di vista della medesima le proposizioni stabilite in prima nei termini meno generali. Le proposizioni alle quali si avrà avuto speciale riguardo nel generalizzare si conserveranno inalterate, ma altre potrebbero richiedere modificazioni più o meno rilevanti.

Qui considereremo , a guisa d' esempio , le proposizioni espresse dalle eguaglianze

$$z_1^z \, z_2^z = (z_1 \, z_2)^z,$$

$$\mathrm{Log}_z \, z_1 + \mathrm{Log}_z \, z_2 = \mathrm{Log}_z \, z_1 \, z_2 \;,$$

che possiamo ritenere stabilite primamente nel supposto che z, z_1, z_2 non abbiano da assumere che valori reali ed anche , tranne z per la prima , esclusivamente positivi.

Secondo il significato da ultimo stabilito per potenza e logaritmo i membri di queste eguaglianze hanno in generale una infinità di valori ; e però fissiamo anzitutto che senso debba avere una eguaglianza fra due formole Φ , Ψ ognuna delle

(*) Crediamo bene astenerci in un corso come il nostro da considerazioni filosofiche , quali troverebbersi in Wronski , che possano non essere tutte di comune e chiaro intendimento. La genesi, che ci piacque esporre, delle operazioni aritmetiche non cagiona di certo difficoltà di sorta in nessuno, mentre basta per introdurre nella nostra trattazione la unità che desideriamo.

quali possa intendersi rappresentatrice di più di un valore. Scrivendo

$$\Phi = \Psi$$

intenderemo significare che, se Φ e Ψ non hanno un solo e medesimo valore, ne hanno però un' egual numero od entrambe una infinità, e che in ogni caso i valori dell' una sono eguali, ciascuno a ciascuno, ai valori dell' altra, astrazion fatta dal diverso ordine con cui possano essere concepiti.

Ciò premesso, esaminiamo la prima delle su riferite eguaglianze. In virtù della definizione ((2) §. 6) il primo membro traducesi in

$$E(z[\rho_1 + \omega_1 i])\, E(z[\rho_2 + \omega_2 i])$$

ossia in

$$E(z[\rho_1 + \rho_2 + (\omega_1 + \omega_2) i])$$
$$[E(\rho_1 + \rho_2 + (\omega_1 + \omega_2) i)]^z,$$

la qual formola è precisamente la definizione del secondo membro, avuto riguardo alla

(1) $$z_1 z_2 = E(\rho_1 + \rho_2 + (\omega_1 + \omega_2) i) .$$

La eguaglianza dunque, ovvero la proposizione che vi sta espressa, sussiste anche colla fatta generalizzazione.

Esaminiamo la seconda. Il suo primo membro in virtù della definizione ((3) §. 6) traducesi in

$$\frac{\rho_1 + \omega_1 i}{\rho + \omega i} + \frac{\rho_2 + \omega_2 i}{\rho + \omega i},$$

la qual somma, se ω ha lo stesso valore in entrambe le frazioni, si riduce alla frazione unica

$$\frac{\rho_1 + \rho_2 + (\omega_1 + \omega_2) i}{\rho + \omega i},$$

che, avuto riguardo alla (1), può dirsi precisamente la definizione di

$$\mathrm{Log}_z\, z_1 z_2 .$$

Perchè sussista la seconda eguaglianza abbiamo qui veduto doversi supporre che l' argomento di z (che bisogna introdurre

per convertire, giusta la (3) §. 6, espressioni per se insignificanti in espressioni significative e suscettibili della realizzazione numerica) venga introdotto in ogni posto collo stesso valore. Questa è una condizione che anche senza avvertire si suole, come cosa affatto naturale, adempiere. Così avvenne, per esempio, allorchè dicemmo che la

$$z^{z_1}\, z^{z_2} = z^{z_1+z_2}$$

può considerarsi come una conseguenza della (2) §. 6. Imperocchè la formola

$$E(z_1[\rho+\omega i])\, E(z_2[\rho+\omega i])\ ,$$

se la lettera ω non fosse supposta avere lo stesso valore in entrambi i posti, non si ridurrebbe alla

$$E([z_1+z_2][\rho+\omega i]) = \{E(\rho+\omega i)\}^{z_1+z_2}\ .$$

Dovendo in seguito aver luogo ben sovente il caso che una eguaglianza, ossia la trasformazione da essa consentita dell' un membro nell' altro, si debba impiegare contemplando specialmente un solo valore dell' un membro ed un solo dell' altro, per mettere fuor di dubbio sin d'ora la legittimità di quei passi faremo riflettere, che, se per una questione una quantità sarà costante, preso una volta uno fra gli argomenti di essa costante, sarà questo immutabilmente durante tutta la questione che si intenderà impiegato ed introdotto dappertutto dove possa occorrere l' argomento della costante; e che, so una lettera significherà una variabile continua, preso inizialmente un' argomento per uno degli stati di grandezza (stato iniziale) della variabile ed immaginatolo messo in tutti i posti nelle formole dove l' argomento della variabile debba figurare, i valori che in tutti questi posti pei successivi stati di grandezza della variabile si dovranno concepire come argomento saranno quelli che succedono con continuità al già prescelto; sì che in ogni istante sarà sempre un solo e medesimo valore che figurerà

come argomento della variabile in tutte quante le formole tratte in considerazione (*).

(*) Cauchy credette per lungo tempo che fosse conveniente di distinguere in modo assoluto per ogni formola uno fra tutti i suoi possibili valori, e di stabilire che desso soltanto dovesse intendersi designato colla notazione ordinaria. Perciò nell'*Analyse alg.*, occorrendogli di designare anche il sistema di tutti i valori possibili di una formola, introduce l'uso delle doppie parentesi. Trovandosi i valori delle principali formole espressi, come ben vedemmo, mediante gli argomenti delle quantità letterali con cui sono formate, Cauchy dovette nell'indicato intento anzitutto fissare quale fra tutti i possibili argomenti di una quantità dovesse sempre intendersi di preferenza considerato ed introdotto nelle formole. Nell'*Analyse alg.* questa cosa è fatta in modo sì imperfetto che ne discende la infelice conseguenza che le notazioni z^a (o incomm., pag. 243), $l(z)$ (pag. 321) non possono essere adoperate se non quando la parte reale di z sia positiva. Più tardi (Vedi *Exercices d'An. et de Ph. math.*, tomi 3 e 4) stabilisce che l'argomento da considerarsi di preferenza (o, come poi dice, *principale*) sia quello compreso fra $-\pi$ e $+\pi$. L'inconveniente citato delle formole z^a, $l(z)$ dispare, ottenendo ciascuna di esse un significato unico (tranne per z reale e negativa) che, seguendo il sig. Björling, Cauchy chiama *potenza principale* o *logaritmo principale* (tomo 4, pag. 253 e 239). Ma vi ha ancora quest'altro grave inconveniente, che, quando una delle quantità letterali che entrano a comporre una formola si concepisce come variabile continua e si faccia variare in modo che la sua parte reale passi dal positivo al negativo o viceversa, il valore dell'argomento principale di essa variabile deve fare un salto cioè subire d'un tratto il cambiamento di -2π o $+2\pi$, e questo salto può produrre nella variazione della formola una discontinuità, la quale, se si lasciasse invece passare l'argomento al di là di $+\pi$ o $-\pi$, non si presenterebbe. Un espresso riguardo alla continuità non incontrasi in queste determinazioni di Cauchy se non nel tomo 4 (pag. 249, 250; 256, 257) nella scelta tra i due valori lasciati a $l(z)$ ed a z^a per z reale e negativa. Oltre le discontinuità nelle successioni dei valori, havvi pure la cessazione di sussistenza di formole, ossia eguaglianze esprimenti proprietà importanti, che va notato come grave inconveniente dell'uso di un'argomento rinchiuso fra limiti fissi (Vedi, per esempio, le pag. 243, 246 dell'*Analyse alg.*).

A compimento del confronto ed in appoggio del modo da noi tenuto nel determinare il significato delle formole di potenza e logaritmo aggiungiamo ancora le seguenti indicazioni. Nell'*Analyse alg.*, dopo aver provato che per esponente reale sussiste la

$$A^x = 1 + \frac{x\,l\,A}{1} + \frac{(x\,l\,A)^2}{1\,.\,2} + \ldots = E(x\,l\,A)\ ,$$

Cauchy stabilisce che (pag. 309), giusta uso già invalso, la stessa eguaglianza debba sussistere anche per esponente complesso z e serve quindi a definire la formola A^z. È lo stesso passo da noi fatto dalla (1) alla (2) nel §. 6. Se non che nell'*Analyse alg.* A significa numero reale positivo (di cui $l\,A$ significa il logaritmo naturale ordinario, quello cioè somministrato dalle tavole) ed A^z denota un solo valore, cioè quello corrispondente ad $m=0$ nella formola

$$A^z = E(z\,(\,l\,A + 2\,\pi\,m\,i\,)\,)\ ,$$

che, giusta la (2) §. 6, esprime tutti i possibili valori di A^z. Il non avere Cauchy consi-

CAPITOLO SECONDO

Rappresentazioni geometriche dei numeri e costruzioni corrispondenti alle operazioni aritmetiche.

§. 8. In un piano, che per fissar le idee riterremo sempre orizzontale, sieno tracciate due rette perpendicolari tra loro. Il punto del piano che, rispetto a queste rette come assi delle coordinate cartesiane, abbia per coordinate x e y verrà assunto come rappresentativo del numero $x+yi$ ossia z e designato con questa lettera stessa. Quella delle due rette in cui

derato nell' *Analyse alg.* il caso in cui la base della formola esponenziale fosse reale negativa ovvero complessa con parte reale negativa e quindi insomma grandezza aritmetica qualunque, come neppure i logaritmi a base qualunque, è ben chiaro che si lega colla difficoltà che avvertimmo aver egli allora incontrato nello stabilire un significato unico per z^0. Nella pag. 312 definisce egli pure i logaritmi risguardando come equivalenti le

$$u+vi=\text{Log}_A z \quad , \quad A^{u+vi}=z \; .$$

Il risultarne una semplice invece di una doppia infinità di valori è natural conseguenza del ritenere

$$A^{u+vi}=E\,((u+vi)\,lA) \text{ invece di } A^{u+vi}=E((u+vi)\,(lA+2\pi mi)).$$

Nell' articolo *Sur les puissances ou exponentielles dont les exposants et les bases sont des quantités géométriques* (uno dei molti che tennero dietro al *Mémoire sur les quantités géométriques.* Tomo 4 degli *Ex. d' An. et de Ph. math.*) definisce z^u, per z ed u entrambe complesse, mediante l' eguaglianza (pag. 255)

$$z^u=e^{ul(z)} \, ,$$

dove $l(z)$ esprime il logaritmo naturale *principale* di z (pag. 248 e 253), il che è come dire mediante l' eguaglianza

$$z^u=E\,(u\,(\rho+\omega i)) \, ,$$

che diversamente dalla (2) §. 6 esprime un solo valore per la restrizione ora imposta ad ω di significare soltanto l' argomento *principale* di z.

giacciono i punti rappresentativi dei numeri reali si dirà *asse reale*, l'altra *asse imaginario*, siccome luogo dei punti rappresentativi dei numeri della forma yi cioè puramente imaginari. *Direzioni positive* degli assi saranno rispettivamente quelle che dal punto O conducono ai punti $1, i$. Le figure esistenti nel piano si supporranno sempre osservate dall'alto al basso. E si supporrà costantemente che la direzione positiva dell' asse imaginario sia stata scelta in modo, per rispetto alla direzione positiva dell' asse reale, che un osservatore posto nel punto O e rivolto al punto 1 abbia il punto i alla sinistra.

Considerando il punto O come polo, l' asse reale come asse polare, e come *senso positivo degli angoli* quello secondo cui ruoterebbe d'un' angolo retto intorno a O la parte positiva dell' asse reale per giungere a coincidenza colla parte positiva dell' imaginario, si ottiene che, mentre le coordinate cartesiane del punto z rappresentano colle loro grandezze le parti reale ed imaginaria del numero z, le coordinate polari ne rappresentino il modulo e gli argomenti. E propriamente, com' è ovvio per la $z = r(\cos\omega + i \operatorname{sen}\omega)$, il raggio vettore rappresenta (ha per misura) il modulo, e l' angolo minore di due retti ch' esso forma colla direzione positiva dell' asse reale rappresenta l' argomento di z compreso fra $-\pi$ e $+\pi$, onde ogni altro argomento riesce rappresentato dall' angolo stesso aggiuntovi o sottrattovi un numero intero di volte quattro retti. Perciò si potrà anche dire che la retta $\overline{Oz}$ (cioè che va da O a z) rappresenta in grandezza e direzione il numero z.

Allorchè si parlerà di angolo d' una retta $\overline{ab}$ coll' asse reale, senza cenno della direzione di quest' ultimo, s' intenderà sempre colla sua direzione positiva; angolo da ritenersi positivo se misurato nel senso positivo degli angoli, negativo se nell' altro senso.

Quando un numero z sarà da concepirsi come una variabile continua, la variazione sua potrà raffigurarsi nella linea descritta dal punto z, la quale si chiamerà *cammino* della variabile. Mediante la infinita varietà dei cammini che si possono

imaginare tracciati da un punto ad un'altro del piano, la rappresentazione geometrica mette in tutta evidenza la infinita varietà di successioni di valori che può percorrere una variabile continua affatto libera (cioè complessa) per passare da un dato valore ad altro dato. Una variabile continua reale, dovendo rimanere sull' asse reale, non può passare da uno ad altro valore che pel cammino rettilineo, porzione dell' asse reale.

§. 9. Supponendo fissati i punti z, z_1 vi hanno costruzioni semplici, che giova conoscere, per determinare il punto Z rappresentativo della somma, o della differenza, o del prodotto, o del quoziente dei due numeri z, z_1.

Somma. Riflettendo che la

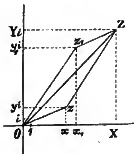
$$Z = z + z_1$$

equivale alle

$$X = x + x_1 \quad , \quad Y = y + y_1 \, ,$$

emerge subito che il punto Z dev' essere il quarto fra i vertici del parallellogrammo di cui tre siano i punti $0, z, z_1$ (Fig. 1.).

Fig. 1.



Per avere Z basterà dunque tirare da z una retta eguale in grandezza e direzione alla $\overline{0 z_1}$ (*). La $\overline{0 Z}$ esprime il modulo di Z, ed è quindi evidente la proposizione spesso impiegata, che il modulo della somma di due o più numeri è minore della somma dei moduli dei singoli numeri, od eguale allorchè questi abbiano eguali argomenti.

Differenza. Dall' essere

$$Z = z - z_1$$

equivalente a

$$z = z_1 + Z \, ,$$

si deduce che per avere il punto Z basterà tirare da z una retta eguale in grandezza ma contraria in direzione alla $\overline{0 z_1}$.

(*) Nella figura abbiamo voluto segnare anche i punti rappresentativi dei numeri reali $1, x, x_1, X$, e quelli rappresentativi degli imaginari $i, yi, y_1 i, Yi$.

Prodotto. Per la costruzione del prodotto e del quoziente giova meglio considerare i moduli e gli argomenti. La

$$Z = z z_1 \ ,$$

riflettendo alle

$$z = r E(\omega i) \ , \ z_1 = r_1 E(\omega_1 i) \ , \ Z = R E(\Omega i) \ ,$$

equivale a quest' altra

$$R E(\Omega i) = r r_1 E([\omega + \omega_1] i)$$

e quindi somministra

$$R = r r_1 \quad , \quad \Omega = \omega + \omega_1 \ ,$$

nell' ultima delle quali non aggiungiamo all' uno od all' altro membro un multiplo arbitrario di 2π rimanendo sottinteso nelle stesse ω, ω_1, Ω. Si otterrà dunque il punto Z facendo ruotare intorno a 0 d' un' angolo eguale a ω_1 la retta $\overline{0z}$ e mutando della medesima la lunghezza nel rapporto di r_1 ad 1. La rotazione avverrà nel senso positivo se sarà positivo il valore di ω_1, e la mutazione nella lunghezza sarà un allungamento se $r_1 > 1$.

Quoziente. Dall' essere

$$Z = \frac{z}{z_1}$$

equivalente a

$$z = z_1 Z \ ,$$

o, altrimenti, dal riflettere che equivale a

$$R E(\Omega i) = \frac{r}{r_1} E([\omega - \omega_1] i)$$

e quindi alle

$$R = \frac{r}{r_1} \quad , \quad \Omega = \omega - \omega_1 \ ,$$

si deduce che si otterrà il punto Z facendo ruotare intorno ad 0 d' un' angolo eguale a $-\omega_1$ la retta $\overline{0z}$ e mutando della medesima la lunghezza nel rapporto di 1 a r_1.

§. 10. Osserviamo ora come siano distribuiti nel piano i punti rappresentativi dei valori di

(1) $$z^{z_1} \ .$$

Perciò ricordiamo la

$$z^{z_1}=E(z_1[\rho+\omega i])=E(x_1\rho-y_1\omega+i[y_1\rho+x_1\omega]).$$

A fine di mettere in evidenza i diversi valori ammettiamo per questo § che ω denoti uno particolare fra gli innumerevoli argomenti di z, e denotiamo con R e Ω il modulo e l'argomento particolari di (1) espressi da

(2) $$R=E(x_1\rho-y_1\omega)\quad,\quad \Omega=y_1\rho+x_1\omega\,.$$

Le altre coppie di modulo ed argomento di (1) si otteranno da

$$E(x_1\rho-y_1\omega-y_1.2\pi m)\quad,\quad y_1\rho+x_1\omega+x_1.2\pi m$$

attribuendo ad m tutti i valori numerici interi, escluso 0. Ora

$$E(x_1\rho-y_1\omega-y_1.2\pi m)=E(x_1\rho-y_1\omega)E(-2\pi y_1 m)=R[E(-2\pi y_1)]^m,$$

$$y_1\rho+x_1\omega+x_1.2\pi m=\Omega+2\pi x_1.m\,;$$

perciò, ponendo per brevità

$$E(-2\pi y_1)=p\quad,\quad 2\pi x_1=q\,,$$

potremo esprimere tutte le coppie di valori del modulo e dell' argomento di (1) colle formole

(3) $$\text{mod.}\,z^{z_1}=Rp^m\quad,\quad \text{arg.}\,z^{z_1}=\Omega+qm\,,$$

ossia per disteso con

val. di m	...	-2	-1	0	1	2	...
arg. z	...	$\omega-4\pi$	$\omega-2\pi$	ω	$\omega+2\pi$	$\omega+4\pi$	...
mod. z^{z_1}	...	$\frac{R}{p^2}$	$\frac{R}{p}$	R	Rp	Rp^2	...
arg. z^{z_1}	...	$\Omega-2q$	$\Omega-q$	Ω	$\Omega+q$	$\Omega+2q$	...

Determinato nel piano il punto (2) (cioè di coordinate polari (2)), a determinare gli altri punti (3), preparato l'angolo ch' è misurato dal modulo di q, si condurranno da 0 due serie di rette che formino colla $\overline{0\,(2)}$ (s' intende la retta che va da 0 al

punto (2)) ordinatamente gli angoli q, $2q$, $3q$,...; $-q$, $-2q$, $-3q$,... (se q sarà positivo le rette della prima serie succederanno alla $\overline{O(2)}$ nel senso positivo degli angoli, e quelle dell' altra nel senso negativo; contrariamente per q negativo) e sulle rette della prima serie si prenderanno da O lunghezze che crescano (o decrescano secondochè p sia maggiore o minore di 1) dall' una all' altra, cominciando dalla $\overline{O(2)}$, nel rapporto costante di p ad 1, e su quelle dell' altra serie lunghezze che decrescano nel rapporto costante di 1 a p.

Le estremità di tutte queste rette ossia i punti (3) costituiscono una punteggiata spirale che partendo dal punto (2) nell' un senso per una serie illimitata di giri si allontana sempre più dal polo, cioè dal punto O, e nell' altro senso per altra serie illimitata di giri vi si avvicina sempre più. Ed in vero, eliminando m fra le equazioni (3), si ha l' equazione

$$\text{mod.}\, z^{x_1} = E\left(\frac{lp}{q}\,\text{arg.}\, z^{x_1} + [\,lR - \frac{lp}{q}\,\Omega\,]\right),$$

la quale, considerandovi le coordinate polari

$$\text{mod.}\, z^{x_1} \quad , \quad \text{arg.}\, z^{x_1}$$

come variabili continue, esprime una di quelle linee continue che soglionsi chiamare spirali logaritmiche. I logaritmi naturali di p e di R qui adoperati sono gli ordinari forniti dalle tavole.

Nel caso particolare di $p = 1$, cioè di $y_1 = 0$, la spirale si riduce ad una circonferenza. In questo caso può darsi che il numero dei punti (3) distinti tra loro non sia infinito. Ma perchè ciò abbia luogo è necessario che, dopo aver ripetuto sulla circonferenza a partire dal punto (2) l' arco corrispondente all' angolo q un numero finito μ di volte, il termine dell' arco ricada in una posizione già avuta dopo un certo numero ν di ripetizioni. In tal caso, detto n un numero intero, dovrebbe essere

$$\mu q = \nu q + 2\pi n \quad \text{d' onde} \quad x_1 = \frac{n}{\mu - \nu} \ ;$$

cioè la (2) essere una potenza d' esponente commensurabile.

§. 11. Osserviamo finalmente come siano distribuiti i punti rappresentativi dei valori di

(1) $$\mathrm{Log}_{z_1} z.$$

Perciò, ricordando la

$$\mathrm{Log}_{z_1} z = \frac{\rho + \omega i}{\rho_1 + \omega_1 i} = \frac{\rho\rho_1 + \omega\omega_1}{\rho_1^2 + \omega_1^2} + \frac{\rho_1\omega - \rho\omega_1}{\rho_1^2 + \omega_1^2} i$$

e denotando con X ed Yi separatamente le parti reale ed imaginaria, avremo per determinare le coordinate cartesiane dei singoli punti rappresentativi dei logaritmi le due formole

(2) $$X = \frac{\rho\rho_1 + \omega\omega_1}{\rho_1^2 + \omega_1^2} \quad , \quad Y = \frac{\rho_1\omega - \rho\omega_1}{\rho_1^2 + \omega_1^2} .$$

Ciascuno degli argomenti ω, ω_1 può prendere una infinità di valori equidifferenti di 2π; laonde si ha, come già avvertimmo, una doppia infinità di punti. Di questi si abbraccierà più facilmente la distribuzione nel piano considerandoli come le intersezioni dei due sistemi di linee (corrispondenti, ben' inteso, ai soli valori ammissibili per ω, ω_1 come argomenti di z, z_1) di cui si ottengono le equazioni eliminando fra le (2) per l' un sistema ω e per l' altro ω_1. Eliminando ω si ottiene

(3) $$\rho_1 X - \omega_1 Y - \rho = 0.$$

Questa equazione rappresenta un sistema di rette che passano tutte pel punto fisso di coordinate

(4) $$X = \frac{\rho}{\rho_1} \quad , \quad Y = 0$$

e che tendono vie più a confondersi coll' asse reale quanto più grandi sono i multipli di 2π che si rinchiudono in ω_1. Eliminando ω_1, al qual fine presentansi tosto le

$$\rho X + \omega Y = \rho_1 \frac{\rho^2 + \omega^2}{\rho_1^2 + \omega_1^2} \quad , \quad X^2 + Y^2 = \frac{\rho^2 + \omega^2}{\rho_1^2 + \omega_1^2},$$

si ottiene

(5) $$\left(X - \frac{\rho}{2\rho_1}\right)^2 + \left(Y - \frac{\omega}{2\rho_1}\right)^2 = \frac{\rho^2 + \omega^2}{4\rho_1^2} .$$

Questa equazione rappresenta un sistema di circonferenze che passano tutte pel punto 0 ed i cui centri si succedono alla distanza costante $\frac{\pi}{\rho_1}$ sulla perpendicolare dividente per mezzo la retta $\overline{0\,(4)}$. Anche le linee (5) passano quindi tutte pel punto (4); e però ogni retta (3) interseca ogni circonferenza (5) nel punto (4) ed in un secondo punto che è desso il rappresentativo di uno dei valori della formola (1). Il punto (4) non rappresenta uno dei valori della formola se non quando z, z_1 sieno reali e positivi.

§. **12.** Esaminiamo anche come si determinino e quindi come siano distribuiti i punti rappresentativi di tutti i valori ricavabili dalle formole

$$ma\ ,\ ma+nb\ ,\ ma+nb+pc$$

col mettere successivamemte per m, n, p tutti i numeri interi a, b, c esprimendo numeri quali si vogliano fissati. Queste formole compariranno sovente in seguito.

Per determinare i punti

$$ma$$

si conduca pel punto 0 la retta nella direzione del numero a (che formi cioè coll' asse reale angolo eguale ad uno degli argomenti di a) e su di essa si porti, cominciando da 0 ed in entrambi i sensi, la lunghezza costante mod. a una, due, tre, ... volte. I punti nei qnali cade di mano in mano il termine di questa lunghezza sono nell'un senso i rappresentativi di $a, 2a, 3a, \ldots$ e nell' altro di $-a, -2a, -3a, \ldots$

Per determinare i punti

$$ma+nb$$

imaginiamo determinati in prima i punti ma; indi tracciamo il sistema delle parallelle alla direzione del numero b passanti pei detti punti ed a partire dai medesimi portiamo replicata-

mente sulle parallelle nell' uno come nell' altro loro senso la lunghezza costante mod. b. I punti nei quali cadono di mano in mano i termini di questa lunghezza sono, insieme coi fissati da prima, i rappresentativi dei valori della formola $ma+nb$. Tutti i punti corrispondenti ad uno stesso valore di n sono in una parallella alla retta dei punti ma; perciò possiamo anche dire che i punti $ma+nb$ sono le intersezioni di due sistemi di rette parallelle dividenti il piano in una doppia infinità di parallellogrammi i cui lati rappresentano in grandezza e direzione i numeri a e b.

Abbiamo supposto le direzioni ossia gli argomenti di a e b diversi tra loro; consideriamo adesso il caso particolare in cui invece siano eguali. Ciò avviene soltanto quando il rapporto

$$(1) \qquad \frac{a}{b}$$

sia reale. In tal caso i punti $ma+nb$ sono tutti in una sola retta, e, volendo concepirne la distribuzione col sussidio della rete parallellogrammica già descritta, imagineremmo che, restando fissa la retta dei punti ma, ed inflessibili inestendibili e come congiunti a cerniera i lati dei parallellogrammi, andasse impiccolendo sino a zero l' angolo dei due sistemi di parallelle. In questo caso è da notarsi attentamente il divario che nella distribuzione dei punti $ma+nb$ sull' unica retta si riscontra secondochè il rapporto (1) sia commensurabile o non lo sia.

Se il rapporto (1) è commensurabile tutti questi punti riescono a trovarsi ad una distanza costante tra loro, vale a dire, la formola binomia $ma+nb$ è riducibile ad una monomia qd o, in altri termini, tutti i valori di quella formola si possono anche ottenere mettendo in questa per q tutti i numeri interi. Ed invero nella presente ipotesi si può porre

$$a=\mu d \quad , \quad b=\nu d \; ,$$

dove μ e ν sieno numeri interi primi tra loro e quindi d un numero avente lo stesso argomento di a e b. Da questa egua-

glianza risulta

$$ma + nb = (\mu m + \nu n) d.$$

Tutti i valori di $ma + nb$ sono dunque multipli di d; e reciprocamente, tutti i multipli di d sono valori di $ma + nb$, esistendo sempre una coppia, e precisamente una infinità di coppie, di numeri interi m, n tali da rendere $\mu m + \nu n$ eguale ad un intero dato qualsiasi.

Se il rapporto (1) è incommensurabile non si può assegnare alcuna distanza finita e minima fra i punti; cioè dire che si possono ottenere con opportuni valori di m e n punti che si succedano ad intervalli più corti di qualsivoglia corta lunghezza fissata. Può giovar di riflettere che questo potrebbe considerarsi come il caso limite del precedente, come il caso in cui a e b ammetterebbero una comune misura ma infinitamente piccola. Per dimostrare però rigorosamente ciò che abbiamo asserito, facciamo riflettere che dalla teoria delle frazioni continue si sa esser possibile di avvicinarsi al rapporto incommensurabile (1) con una infinità di rapporti commensurabili (μ a ν) in guisa da verificare la condizione

$$\frac{a}{b} = \frac{\mu}{\nu} + \frac{\varepsilon}{\nu^2},$$

essendo ε minore dell' unità. Da qui si ha

$$\nu a - \mu b = \frac{\varepsilon b}{\nu},$$

e siccome l'intero ν può farsi ingrandire senza confine, così il modulo di $\nu a - \mu b$ può rendersi minore di qualunque grandezza assegnata. E però ad ogni punto $ma + nb$ già fissato nella retta può fissarsene vicino un'altro, e veramente quanti se ne vorranno, $(m + \nu) a + (n - \mu) b$ con intervallo $\nu a - \mu b$ minore di qualunque grandezza assegnata.

Per determinare i punti

(2) $$ma + nb + pc$$

imaginiamo determinati i punti $ma + nb$; indi tracciamo il sistema delle parallelle alla direzione del numero c passanti pei detti punti ed a partire dai medesimi portiamo replicatamente sulle parallelle nell' uno come nell' altro loro senso la lunghezza costante mod. c. I punti nei quali cadono di mano in mano i termini di questa lunghezza sono insieme coi fissati da prima i rappresentativi dei valori della formola (2).

Se questa formola non è riducibile ad una monomia o binomia si possono sempre dare ad m, n, p tali valori da ottenere punti succedentisi ad intervalli minori di qualunque grandezza assegnata. Fu Jacobi il primo a porre in rilievo questa verità, d' onde discendono, come vedremo, importantissime conseguenze (*). Per dimostrarla basta evidentemente provare che si possono prendere per m, n, p valori tali che mod. $(ma + nb + pc)$ riesca minore di una grandezza assegnata qualunque. Denotinsi con a_1 ed a_i la parte reale ed il coefficiente di i del numero a, e similmente per b, c; e pongasi

$$b_1 c_i - b_i c_1 = A \quad , \quad c_1 a_i - c_i a_1 = B \quad , \quad a_1 b_i - a_i b_1 = C \; ,$$

d' onde

$$a_1 A + b_1 B + c_1 C = 0 \quad , \quad a_i A + b_i B + c_i C = 0 .$$

Intendendo con μ, ν, ϖ numeri interi, pongasi pure

$$\frac{\mu B}{A} - \nu = N \quad , \quad \frac{\mu C}{A} - \varpi = P$$

da cui

$$\mu a_1 + \nu b_1 + \varpi c_1 = -(b_1 N + c_1 P) \; ,$$

$$\mu a_i + \nu b_i + \varpi c_i = -(b_i N + c_i P) \; .$$

Ora μ e ν si possono determinare in guisa che N riesca minore di qualsia quantità data. E, determinati μ e ν, si può pren-

(*) Vedi la Memoria *De funct. duar. variab. quadrupl. periodicis, etc.* Giorn. di Crelle, tomo 13. Quivi Jacobi non fa alcuna allusione a rappresentazione geometrica. La sua dimostrazione che qui riportiamo è di un carattere puramente aritmetico.

dere ϖ in modo che riesca mod. $P \leqq \frac{1}{2}$. E però, se dicasi λ un numero grande quanto piace, si potrà far sì che riescano

$$\text{mod.}\,(b_1 N + c_1 P) < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_1\,,$$

$$\text{mod.}\,(b_i N + c_i P) < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_i\,;$$

vale a dire infine, si possono determinare gl' interi μ, ν, ϖ in guisa che, ponendo

$$\mu a + \nu b + \varpi c = c'$$

o, ciò ch' è lo stesso,

$$\mu a_1 + \nu b_1 + \varpi c_1 = c_1' \quad , \quad \mu a_i + \nu b_i + \varpi c_i = c_i'\,,$$

riescano

$$\text{mod.}\,c_1' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_1\,,\ \text{mod.}\,c_i' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_i\,.$$

Pongasi ora successivamente

$$\mu' b + \nu' c + \varpi' c' = c''$$
$$\mu'' c + \nu'' c' + \varpi'' c'' = c'''$$
$$\mu''' c' + \nu''' c'' + \varpi''' c''' = c''''$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

I coefficienti $\mu', \nu', \varpi'; \mu'', \nu'', \varpi''$; ecc. per ciò che si è detto si possono concepire numeri interi tali che diano

$$\text{mod.}\,c_1'' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_1'\,,\ \text{mod.}\,c_1''' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_1''\,,\ldots$$

$$\text{mod.}\,c_i'' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_i'\,,\ \text{mod.}\,c_i''' < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)\text{mod.}\,c_i''\,,\ldots$$

d' onde

$$\text{mod.}\,c_1^{(r)} < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)^r \text{mod.}\,c_1$$

$$\text{mod.}\,c_i^{(r)} < \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\lambda}\right)^r \text{mod.}\,c_i\,.$$

E però è chiaro che per r opportunamente grande il modulo del numero $c^{(r)} = c_1^{(r)} + ic_i^{(r)}$ riuscirà minore di qualsia quantità data; ed, essendo $c^{(r)}$ esprimibile con a, b, c nella forma (2), resta dimostrata la proprietà asserita.

Per non lasciar luogo ad obbiezione dobbiamo, in aggiunta alla esposta dimostrazione, esaminare se possono darsi e quali conseguenze trarrebbero seco i seguenti tre casi: che in uno dei termini della serie

$$c', c'', c''', c'''', \ldots .$$

riesca zero la parte reale o la parte imaginaria; che riescano zero entrambe; che riesca zero la quantità A od una delle analoghe successive, cioè zero una delle quantità

$$c_1^{(r-1)} c_i^{(r)} - c_i^{(r-1)} c_1^{(r)}.$$

Il verificarsi del primo caso non infirma per niente la dimostrazione. Se la parte reale di $c^{(r)}$ fosse nulla, quella di $c^{(r+1)}$ potrebbe rendersi minore (come, per esempio, seguirebbe dalla $c_1' = - b_1 N$ quando fosse nulla la parte reale di c) di qualunque quantità assegnata, ed usando di siffatta parte reale di $c^{(r+1)}$ si proseguirebbe la determinazione dei termini $c^{(r+2)}$, $c^{(r+3)}, \ldots$ sino a che anche la parte imaginaria fosse ridotta minore di quella quantità che fosse piaciuto di fissare.

Supponiamo che si verifichi il secondo caso, cioè che riescano simultaneamente $c_1^{(r)} = c_i^{(r)} = 0$. Allora si avrà fra a, b, c una relazione della forma

$$(3) \qquad m'a + n'b + p'c = 0$$

dove gl' interi m', n', p' possono supporsi primi tra loro. Esprimendo con δ il massimo divisor comune di n' e p', la equazione

$$\frac{m'a}{\delta} = - \frac{n'}{\delta} b - \frac{p'}{\delta} c$$

avverte che $\frac{ma}{\delta}$ e quindi qualunque somma di multipli di $\frac{ma}{\delta}$ e di a è tra i valori ricavabili dalla formola (2); e però es-

sendo i numeri $\frac{ma}{\delta}$ ed a in rapporto commensurabile tra loro, saranno pure valori di (2) tutti i multipli del massimo divisor comune $\frac{a}{\delta}$ dei numeri stessi. Sieno finalmente n'' e p'' interi tali da rendere

$$\frac{n'}{\delta} n'' + \frac{p'}{\delta} p'' = 1 \quad ;$$

si formi il numero $p'' b - n'' c$ che sarà pure tra i valori della formola (2) dichiariamo che questa formola trinomia può ridursi in una binomia, in una somma cioè di multipli dei due numeri

$$\frac{a}{\delta} \ , \quad p'' b - n'' c \ .$$

Basta infatti osservare le identità

$$a = \delta \frac{a}{\delta},\ b = -m' n'' \frac{a}{\delta} + \frac{p'}{\delta}(p'' b - n'' c),\ c = -m' p'' \frac{a}{\delta} - \frac{n'}{\delta}(p' b - n'' c).$$

Supponiamo che si verifichi il terzo caso, cioè che per un valore di r si abbia l' eguaglianza

$$c_1^{(r-1)} c_i^{(r)} - c_i^{(r-1)} c_1^{(r)} = 0 \ .$$

Essendo sempre $c^{(r)}$ uno dei valori della formola (2) vi hanno sempre per $c_1^{(r)}$ e $c_i^{(r)}$ espressioni della forma

$$c_1^{(r)} = m a_1 + n b_1 + p c_1 \ , \quad c_i^{(r)} = m a_i + n b_i + p c_i$$

dove gl' interi m, n, p s' intendono variare con r. E però, sostituendo nella supposta eguaglianza queste espressioni in luogo di $c_1^{(r-1)}, c_i^{(r-1)}, c_1^{(r)}, c_i^{(r)}$, la eguaglianza potrà ridursi alla forma

$$\alpha A + \beta B + \gamma C = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix} = 0 \ .$$

essendo α, β, γ numeri interi. Ora prendiamo ad arbitrio sei numeri interi $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ e poniamo

$$u = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad v = \begin{vmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{vmatrix}$$

ossia

$$u = u_1 + i\,u_i = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} + i \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}, \quad v = \text{ecc.}$$

Ne risulta

$$u_1 v_i - u_i v_1 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_i & b_i & c_i \end{vmatrix}$$

e quindi

$$u_1 v_i - u_i v_1 = 0 .$$

Ma una siffatta eguaglianza esprime che il rapporto

$$\frac{u}{v} = \frac{u_1 + i\,u_i}{v_1 + i\,v_i}$$

è reale. Ora, se questo rapporto fosse incommensurabile, la somma dei multipli di u e v, che dà sempre valori della formola (2), somministrerebbe, come abbiamo dimostrato, valori ossia punti succedentisi ad intervalli minori di qualunque grandezza assegnata, e però sussisterebbe ciò che in generale abbiamo asserito circa la distribuzione dei punti (2). Se invece il rapporto fosse commensurabile cioè eguale a quello di due interi μ e ν, si avrebbe

$$\nu u - \mu v = 0 ,$$

la quale relazione pei valori di u e v si traduce in una della forma (3) che vedemmo significare la riducibilità della formola (2) in una formola binomia. Ed ecco così completata la dimostrazione che, se la formola (2) non è riducibile ad una monomia o binomia, si possono da essa ottenere valori ossia punti succedentisi ad intervalli minori di qualunque grandezza assegnata.

Se in luogo delle formole

$$ma \ , \ ma + nb \ , \ ma + nb + pc$$

fossero da considerarsi le

$$z + ma \ , \ z + ma + nb \ , \ z + ma + nb + pc \ ,$$

che ne differiscono soltanto per la giunta del numero z che supponiamo fissato, le posizioni dei punti rappresentativi di tutti i valori di queste tre formole sarebbero quelle che verrebbero a prendere i punti-valori delle prime tre ove si traslocassero, rispetto agli assi, secondo rette tutte eguali in grandezza e direzione alla $\overline{Oz}$.

§. **13**. I sistemi di numeri o punti

$$ma \quad , \quad ma + nb$$

ovvero

$$z + ma \quad , \quad z + ma + nb$$

sono casi particolari di sistemi semplicemente e doppiamente infiniti di punti aventi tra loro distanze sempre finite, delle quali può assegnarsi un limite inferiore, e più grande di zero, comune per tutte quelle di un medesimo sistema. Abbandonando ora questi sistemi particolari, vogliamo indicare come tutti quanti i possibili sistemi di numeri o punti aventi tra loro distanze finite, delle quali sia in ogni sistema assegnabile un limite inferiore e più grande di zero, si possano appunto distinguere in semplicemente e doppiamente infiniti.

Imaginiamo dunque un sistema di numeri o punti ϖ (*) nel solito piano, ed il piano stesso diviso in una infinità di corone circolari mediante circonferenze descritte intorno al punto O come centro e con raggi crescenti in progressione aritmetica la cui differenza sia di grandezza finita qualsivoglia Δ. Considerando la corona *m esima*, cioè quella determinata dalle circonferenze di raggi $m\Delta$ e $(m+1)\Delta$, il numero N_m dei punti ϖ in essa contenuti, contando come tali anche quelli

(*) Per fissar le idee, possiamo imaginare che ϖ dipenda, come le formole monomia e binomia di poc' anzi, da indici ai quali siano da attribuirsi infinità di valori particolari.

che si trovassero sulla circonferenza maggiore ed escludendo quelli che si trovassero sulla minore, crescerà con m secondo una legge dipendente dal modo di distribuzione dei punti ϖ nel sistema imaginato. Questa considerazione suggerisce con bastante spontaneità la distinzione che desideriamo di fare e di cui più tardi verrà riconosciuta tutta la opportunità, la distinzione cioè tra i casi nei quali N_m rimane sempre finito e quelli nei quali cresce indefinitamente con m.

Imaginiamo primamente un sistema di numeri o punti ϖ che dia luogo ad un caso della *prima classe*. Per esso potremo assegnare un numero ι finito ed invariabile e pur tale che rimanga $N_m < \iota$ qualunque sia m. Risguardando tutti i numeri ϖ di una stessa corona come formanti un gruppo unico, potremo concepire tutti quanti i numeri ϖ del sistema (qualunque possa essere l'ordine secondo cui sieno stati dati o concepiti da prima) ordinati in una infinità *semplice* di gruppi, succedentisi come succedonsi in grandezza le corone, ognuno dei quali non contenga più di ι numeri del sistema. Un' indice m che debba assumere i valori $1, 2, 3, \ldots$ basterà per designare ordinatamente tutti i gruppi. I punti o numeri della corona o gruppo m *esimo* avranno tutti un modulo maggiore di $m\Delta$. Se occorresse di determinare, in conformità col già posto, l'ordine di successione dei numeri ϖ in ogni singolo gruppo, potremmo imaginare che fosse quello secondo il quale i punti verrebbero incontrati da un raggio che dall'essere nella direzione dell'asse reale prendesse a ruotare nel senso positivo degli angoli. Un sistema di numeri della classe qui considerata potremo con buona ragione chiamarlo *semplicemente* infinito.

Imaginiamo adesso un sistema di punti ϖ che dia luogo ad un caso della *seconda classe*. Sia d un limite inferiore delle distanze di essi punti comunque a due a due, ed imaginiamo tutto il piano diviso in quadrati di diagonale d mediante due sistemi di rette parallelle, alla distanza $\frac{1}{\sqrt{2}}\, d$ l' una dall' altra, e nel cui novero, per fissar le idee, riterremo essere anche gli assi

reale ed imaginario. Ogni quadrato non potrà contenere più di uno dei punti ϖ. Inoltre manifestamente ciascun quadrato, e però anche il punto ϖ che vi fosse dentro, potrà concepirsi designato mediante una coppia di valori di due indici m e n che possano prendere tutti i valori numerici interi positivi e negativi. Fissando una legge secondo cui abbiano da succedersi le coppie di valori di questi indici, resterà fissato un ordine secondo cui si potranno concepire succedentisi i punti ϖ. Se l' indice m cresca nella direzione positiva dell' asse reale ed n nella positiva dell' imaginario e se siano ± 1 i loro valori pei quadrati aventi il punto O a vertice comune; il centro del quadrato (m, n) sarà il rappresentativo del numero

$$\left[m - \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{2}\right) i\right] \frac{d}{\sqrt{2}}$$

ed il punto ϖ che si trovasse in questo quadrato e che potrebbe designarsi con $\varpi_{m,n}$ rappresenterebbe un numero riducibile alla forma

$$[m - \varepsilon + (n - \eta) i] \frac{d}{\sqrt{2}},$$

essendo ε, η numeri reali compresi fra zero e l' unità. Un sistema della classe ora considerata, di cui tutti i numeri o punti possano concepirsi ottenuti facendo percorrere a due indici una infinità di valori numerici interi, potremo dirlo *doppiamente* infinito. E resta così spiegato come effettivamente tutti i possibili sistemi di numeri o punti aventi fra loro distanze finite, delle quali in ogni sistema sia assegnabile un limite inferiore e più grande di zero, si possano distinguere puramente nelle classi di semplicemente e doppiamente infiniti.

§. **14.** Oltre la rappresentazione dei numeri esposta ed impiegata nei §§. precedenti, altre più o meno diverse se ne potrebbero imaginare quante piacesse. Noi vogliamo adesso indicare quella che dopo la esposta venne pure giustamente in uso, ed alla quale converrà che ci riferiamo nel seguito del nostro corso.

S' imagini al disotto del piano orizzontale della prima rappresentazione una sfera che lo tocchi nel punto 0, e dal punto più basso di tale sfera la retta che va al punto $x+yi$ del piano: il punto dove questa retta traversa la sfera si riguardi come il rappresentativo del numero $x+yi$.

Se un punto nel piano si allontana indefinitamente dal punto 0, qualunque direzione esso segua, il punto che gli corrisponde sulla sfera si accosta indefinitamente al punto più basso; ond'è che la rappresentazione sferica si presta meglio della piana al concepimento di tutti i numeri non finiti come numero unico, o, volendoci riferire ad una variabile, al concepimento di tutti i valori non finiti di una variabile come un valor solo da potersi trattare non diversamente da ciascuno dei valori finiti della variabile stessa. Di questo modo di considerare i numeri o valori non finiti, che noi da qui innanzi adotteremo, riconosceremo a suo luogo tutta la opportunità; per adesso contentiamoci di qualche breve osservazione.

Giusta questo modo impiegheremo il solito simbolo ∞ e per significare numero o valore infinito senza distinzione alcuna, e per designare il punto più basso della sfera, ed anche, risguardando il piano come una superficie che si chiude in un punto all' infinito, per designare così fatto punto.

Considerando una relazione algebrica, per esempio, tra due variabili, se si volesse noverare più di *un* valore non finito, non si potrebbe asserire senza eccezioni che ad ogni valore dell' una variabile corrisponde sempre uno stesso numero di valori dell' altra. Prendiamo per un caso particolare la relazione

$$w=\frac{1}{z};$$

non si potrebbe dire che ad ogni valore di z corrisponde sempre un solo valore per w e reciprocamente; poichè per w corrispondentemente al valor 0 della z si potrebbero ottenere, mutando il cammino, tutti quanti quei valori infiniti che fosse piaciuto di qualificare come distinti l' uno dall' altro. Così, per esempio, facendo arrivare la z al punto 0 per la parte posi-

tiva dell' asse reale, si otterrebbe per w l' infinito che suolsi chiamare positivo, e, facendovela arrivare per la parte negativa dell' asse reale, si otterrebbe l' infinito che suolsi chiamare negativo. Lo stesso direbbesi di z corrispondentemente al valor 0 di w (*).

CAPITOLO TERZO

Convenzioni particolari per e^z e lz.

§. 15. Secondo la definizione espressa dalla eguaglianza (2) del §. 6 la formola e^z avrebbe una infinità di valori ricavabili da

$$E(z[1+2m\pi i])$$

coll' attribuire ad m tutti i valori numerici interi positivi e negativi. Tuttavia è uso generale fra gli analisti di considerare la formola e^z come esprimente un solo valore cioè quello fra i su indicati che corrisponde al valor 0 di m. Con siffatta restrizione diviene superfluo l' impiego del segno $E(z)$, riuscendo identicamente $e^z = E(z)$. Contro quest' uso si potrebbe riflettere, che, o bisogna rinunciare per tutte quante le formole a^b alla moltiplicità dei valori che affatto naturalmente si è condotti ad attribuir loro, od avviene che non si possa dare alle lettere che entrano come basi di potenze (con esponenti non interi) o di esponenziali nelle espressioni il valor particolare e senza ristringere la estensione del significato delle espressioni medesime. Ciò non ostante non vogliamo arbitrarci a deviare da quest' uso seguitando a valerci della scrittura $E(z)$ anzichè della e^z; e però, dovendo sottoporci all' uno od all' altro dei notati inconvenienti ci sottoporremo al minore, che è quello di lasciare in generale alla formola a^b la moltiplicità dei signi-

(*) Il valor ∞ di qualsiasi variabile, reale o non reale, potrà caratterizzarsi dicendo che ne è infinito il modulo, come il valor 0 dicendo che il modulo ne è nullo, senza riguardo di sorta all' argomento.

ficati che la sua natura analitica domanda e di fare un' eccezione per la e^b (ossia e^z). Dichiariamo adunque che d'ora innanzi colla scrittura e^z intenderemo significare quell' unico valore che è dato dalla $e^z = E(z)$ ossia dalla

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1\,.\,2} + \ldots .$$

Ed importa di ricordare sempre questa volontaria restrizione, per non mai cadere nelle conseguenze di qualche ristringimento inavvertito nelle formole e quindi nei risultati delle investigazioni, e per riconoscere chiaramente in ogni caso la legittimità delle trasformazioni ed in generale d' ogni sorta di deduzioni quali occorrono in special modo nelle teoriche delle espressioni composte con esponenziali, come sono, ad esempio, le serie $\mathfrak{S}$.

Infine avvertiamo che, definita mediante l' eguaglianza $e^z = E(z)$, la formola e^z viene bensì ad avere un solo valore per ogni valore di z, ma per z non finito essa ammette ancora una infinità di valori e propriamente qualunque valore aritmeticamente possibile; imperocchè ciò avviene di $E(z)$ non meno che, siccome vedremo, di qualunque altra funzione espressa da serie ordinata secondo le potenze intere positive della variabile e convergente per tutti i valori finiti di questa. Per mettere sino d' ora fuor di dubbio questo fatto a riguardo di e^z, ovvero (volendolo produrre con un valore finito, per esempio, col valor 0 di z) a riguardo di $e^{\frac{1}{z}}$ per $z = 0$, pongasi $\omega = (2n + 1)\frac{\pi}{2} \pm \varepsilon$, intendendo con n un numero intero e con ε una quantità positiva; si avrà

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\pm\frac{\text{sen}\,\varepsilon}{\varepsilon}\cdot\frac{\varepsilon}{r}}\left(\cos\frac{\cos\varepsilon}{r} - i\,\text{sen}\,\frac{\cos\varepsilon}{r}\right),$$

ed anche, ponendo $\frac{\varepsilon}{r} = a$,

$$e^{\frac{1}{\varepsilon}} = e^{\pm \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\varepsilon} a} \left(\cos \frac{a \cos \varepsilon}{\varepsilon} - i \operatorname{sen} \frac{a \cos \varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

Facendo impiccolire ε e r simultaneamente, in guisa che a serbi valore opportuno, si otterrà che il modulo di $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ prenda sensibilmente quel valore che più piacerà, poichè $\lim \frac{\operatorname{sen} \varepsilon}{\varepsilon} = 1$. Ed in oltre, per l'arbitrarietà che pur nella piccolezza rimane in ε, si potrà fare in modo che l'argomento di $e^{\frac{1}{\varepsilon}}$ cioè l'arco $\frac{a \cos \varepsilon}{\varepsilon}$ termini sensibilmente in quel punto che più piacerà della circonferenza.

Passiamo alla formola $l\,z$. Anche a questa non si attribuisce dalla generalità degli analisti tutta la moltiplicità di valori risultanti dal §. 6, cioè la doppia infinità di valori ricavabili dalla espressione

$$\frac{\rho + \omega i}{1 + 2 m \pi i}$$

coll' attribuire ad m e all' altro intero implicito in ω tutti i valori positivi e negativi. Ma si suole invece, al presente, accordare a lz soltanto una infinità *semplice* di valori, quella cioè che rimane ponendo $m = 0$ nella espressione precedente (*). Ora noi vogliamo anche in ciò seguire l'uso più comune, e quindi dichiariamo che alla formola $l\,z$ attribuiremo d'ora innanzi la semplice infinità di valori concessa dalla

$$l\,z = \rho + \omega i.$$

Questa restrizione si accorda con quella già adottata per

(*) Tralasciamo di dire essersi anche voluto limitare il significato di $l\,z$ sino ad un solo valore, avendone già fatto menzione e notato già in parte gli inconvenienti. La riduzione ad una infinità semplice, nelle condizioni su indicate, non va soggetta ad eguali inconvenienti e presenta d'altra parte ragguardevoli vantaggi. Intanto non sarà mai la base (fissata invariabilmente nel valore e) ma solamente il numero di cui è preso il logaritmo che accadrà di concepire come variabile.

e^z; vale a dire, il significato meno esteso che ora ammettiamo per $l z$ è precisamente quello che si cava per w dalla eguaglianza

$$e^w = z\,,$$

ove con e^w non altro s' intenda fuorchè $E(w)$. Infatti, scrivendo la eguaglianza sotto la forma

$$E(w) = E(\rho + \omega i)\,,$$

il §. 5 avverte che w e $\rho + \omega i$ non possono differire se non di un multiplo di $2\pi i$; ma un siffatto multiplo sta anche già sottinteso in ω, dunque

$$w = \rho + \omega i\,.$$

Oltre il vantaggio di riavere, mercè la seconda restrizione, in $l z$ precisamente ancora la funzione inversa di e^z, faremo sin d' ora notare anche quest' altro: sussistere perfettamente, nel senso dichiarato in principio del §. 7, la eguaglianza

$$l z = \int_1^z \frac{d z}{z}\,, \qquad (*)$$

(*) Questa eguaglianza presenta una tra le varie definizioni che si possono dare della funzione $l z$. Si sa che $l z$ vien anche definita (astrazion fatta da un fattor costante, giacchè la proprietà appartiene ad ogni sistema di logaritmi) mediante la proprietà

$$\varphi(z \,.\, z_1) = \varphi(z) + \varphi(z_1)$$

dove z_1 designa una variabile arbitraria come z.

È chiaro che analogamente a questa possono porsi le definizioni per ognuna delle operazioni ovvero delle formole semplici che passammo in rassegna. Delle formole

$$a\,b\,,\ \frac{a}{b}\,,\ a^b\,,$$

considerate come funzioni di a, le prime due possono definirsi mediante la

$$\varphi(a + a_1) = \varphi(a) + \varphi(a_1)$$

e la terza mediante la

$$\varphi(a \,.\, a_1) = \varphi(a) \,.\, \varphi(a_1)\,;$$

e considerate come funzioni di b, la seconda e la terza possono definirsi rispettivamente colle

$$\varphi\left(\frac{b\,b_1}{b + b_1}\right) = \varphi(b) + \varphi(b_1),$$

$$\varphi(b + b_1) = \varphi(b) \,.\, \varphi(b_1)\,.$$

il cui secondo membro, per la introduzione di tutta la variabilità possibile cioè della complessa, acquista bensì, come vedremo una infinità di valori, ma semplice e non doppia.

Non facciamo alcuna innovazione relativamente ai logaritmi a base diversa da e, che nel presente corso non impiegheremo giammai.

Possiamo riflettere che le eguaglianze

$$\varphi(z + z_1) = \varphi(z) + \varphi(z_1),$$
$$\varphi(z + z_1) = \varphi(z) \cdot \varphi(z_1),$$
$$\varphi(z \cdot z_1) = \varphi(z) + \varphi(z_1),$$
$$\varphi(z \cdot z_1) = \varphi(z) \cdot \varphi(z_1)$$

esprimono che, per le funzioni le quali vi soddisfanno, hanno luogo nei modi i più semplici possibili i teoremi d' addizione e di moltiplicazione delle variabili d' onde dipendono.

SEZIONE SECONDA

CONCETTO DI FUNZIONE ED ALCUNE SUE DISTINZIONI CARDINALI

CAPITOLO PRIMO

Funzioni reali di una variabile reale.

§. 16. I primi analisti impiegarono la parola *funzione* per indicare le varie potenze d'una stessa quantità. Giovanni Bernoulli sembra essere stato il primo ad estenderne il significato sino a comprendere espressioni formate in qualsia maniera analitica con una quantità considerata come variabile indipendente. In questo senso, adottato da Leibnitz, si stabilì definitivamente nella scienza; dove si vedrà impiegato da Eulero e Lagrange per designare e le quantità espresse esplicitamente e quelle legate alla variabile mediante equazioni, abbiano tali quantità un solo valore o ne abbiano parecchi per ogni valore della variabile. In questi ultimi tempi si può segnalare un'ultimo passo nella estensione del concetto di funzione, pel quale cioè questo concetto vien stabilito indipendentemente da ogni supposizione di esprimibilità analitica. Funzione di una variabile

reale x vien detta qualunque quantità che per ogni valore particolare di x compreso in alcuni intervalli prenda uno od un determinato sistema di valori particolari, sappiasi o no se questa dipendenza sia esprimibile coi segni dell' analisi.

Noi adottiamo quest' ultima definizione, ed insistiamo nel far riflettere ch' essa altro assolutamente non suppone se non due (o più, se la funzione ammetta più di un valore) successioni di valori riferite l' una all' altra in modo che ad ogni singolo valore di una corrisponda un singolo valore dell' altra.

Con questa definizione si collegava la domanda: se potessero darsi dipendenze fra variabili reali che non fossero esprimibili per mezzo di un determinato sistema di operazioni analitiche (*). La risposta emergeva negativa, essendo risultato che, se una funzione di una variabile reale è continua e finita in un dato intervallo, in questo intervallo essa, qualunque sia, può esprimersi mediante un determinato sistema di operazioni analitiche. Questo risultato è d' immediata importanza anche rispetto alle applicazioni dell' analisi; ed anzi è appunto l' applicazione dell' analisi alle questioni della fisica che suggeriva l' ultima definizione di funzione. Innanzi che il medesimo fosse stabilito non era a pieno giustificata l' applicazione dei risultamenti della teorica delle *funzioni analitiche* (**) ad una qualunque dipendenza fra variabili reali che nell' ordine concreto avesse potuto presentarsi.

Sebbene ora, pel detto risultato, torni in sostanza lo stesso stabilire il concetto di funzione, generalmente continua, di una variabile reale *con* ovvero *senza* presupposizione di espri-

(*) Per operazioni analitiche vogliamo qui intendere le operazioni aritmetiche insieme colla integrazione. Un sistema di operazioni può essere finito o infinito cioè involgere un numero finito o infinito di singole operazioni. Se infinito, deve però intendersi tale che, effettuando secondo l' ordine in esso designato un numero vie più crescente di singole operazioni, il risultato vada convergendo verso un limite determinato, almeno per quei valori dei quali le variabili si suppongono suscettibili.

(**) Analitica dicesi una funzione che si possa esprimere mediante un qualche sistema di operazioni analitiche da effettuarsi sulla variabile.

mibilità analitica, tuttavia diamo preferenza alla definizione che già dichiarammo d'adottare, perchè meglio concorda colla moderna tendenza dell' analisi, per la quale le proprietà vengono a prendere il posto più sostanziale e le espressioni analitiche a figurare puramente come forme più o meno accidentali, nelle quali le proprietà si possono tradurre (*) e colle quali si possano effettuare certune calcolazioni particolari occorrenti; e perchè, trasportata nel campo delle funzioni di variabili affatto libere, permette di intraprenderne lo studio da punto di vista assai generale insieme e vantaggioso.

§. **17.** L'ammessa definizione di funzione d'una variabile reale non implica necessariamente la continuità e senza di questa limitazione comporta una arbitrarietà stragrande; per ogni valore della variabile il valore della funzione potrebbe supporsi affatto arbitrariamente diverso da ogni valore precedente e susseguente. Ma circa funzioni intese in cosifatta arbitrarietà, ed alle quali non si potrebbe immediatamente applicare l' analisi infinitesimale, non si è stabilita alcuna teorica.

Le funzioni che sonosi studiate e colle quali venne a costituirsi ed a crescere l' analisi infinitesimale, sono le funzioni

(*) Circa questo punto, si già detto nelle *Notizie* ci permettiamo di qui aggiungere qualche altra riflessione. Riguardando anche soltanto gli elementi dell' algebra si scorge già sovente che si parte dalle proprietà rinvenute in una formola, come da un dato primitivo ed assoluto, per estendere la sussistenza di essa formola a casi nei quali in prima non avrebbe avuto significato alcuno. Consideriamo inoltre una di quelle espressioni analitiche (quali hannosi nelle serie, negli integrali definiti, nei prodotti infiniti) che posseggono significato soltanto pei valori delle variabili (o lettere con cui sono formate) compresi entro determinati confini. Estraendo da una tale espressione un sistema di proprietà, che possa del pari definire l'ente ossia la variabile dipendente da essa rappresentata, il sistema delle proprietà potrà bene spesso concepirsi come sussistente fuori non meno che entro il confine anzidetto. Ciò essendo, il sistema delle proprietà si potrà tradurre in altre espressioni analitiche che conservino o prendano significato di mano in mano entro altri ed altri confini. Si sarà allora nel caso di un ente definibile o mediante un sistema unico di proprietà dappertutto egualmente significative, o mediante una varietà di espressioni analitiche ognuna delle quali significativa soltanto entro un proprio particolare confine, entro il quale inoltre non sarebbe mai essa sola la possibile espressione analitica. Il sistema delle proprietà dovrà riconoscersi come essenza, le varie espressioni analitiche come forme in certo qual modo accidentali dell' ente medesimo.

generalmente soggette alla continnità, le funzioni cioè delle quali un valore non può in generale differire arbitrariamente dai valori precedenti e susseguenti ma deve sensibilmente confondersi con essi. Le formole semplici che abbiamo considerato e le composte che d' ordinario se ne traggono si presentano come funzioni continue tostochè si consideri come variabile continna qualcuna delle lettere che vi entrano. Generalmente continue sono le funzioni di variabili continue che richieggonsi nella rappresentazione delle leggi dell' ordine concreto. Così, se ancora, per esempio, si consideri il movimento di un punto e dicasi $s = f(t)$ la lunghezza della linea percorsa nel tempo t, siccome il passaggio da uno ad altro punto non può concepirsi effettuato se non per una successione continua di punti intermedi, la funzione $f(t)$ deve avere la proprietà che, mentre t varia per gradi insensibili da un valore t_0 ad altro successivo t_1, essa pure vari per gradi insensibili cioè prenda tutti i valori reali possibili fra $f(t_0)$ e $f(t_1)$.

Circa il concetto della continuità nelle funzioni vogliamo entrare in alcuni particolari, fissando l' attenzione esclusivamente sul caso in cui ad ogni valore della variabile, nell' intervallo da considerarsi, corrisponda un solo valore della funzione; il qual caso somministra in sostanza tutto ciò che su questo punto potrà poi richiedersi in caso qualsiasi. Sia $a \dots b$ l' intervallo, cioè dire a e b i valori estremi che supponiamo qui concessi alla variabile indipendente x, e figuriamoci i valori di una funzione rappresentati geometricamente, secondo l' ordinaria maniera, mediante le ordinate erette verticalmente sopra ogni punto della porzione $a \dots b$ di un' asse orizzontale $0x$. Considerando la linea $\alpha\beta$ (Fig. 2) formata dalle estremità delle ordinate, se dessa sarà continua, vale a dire se si potrà passare dal principio α al termine β senza mai distaccarsene, si dirà che la funzione è *continua nell' intervallo*

Fig. 2.



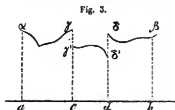
$a \dots b$. Ma notiamo bene, per la continuità basta che la linea corra da α a β senza interruzione di sorta; ma del resto può avere forma qualunque, può essere, per esempio, una porzione di un' unica linea algebrica, ovvero può essere composta di un numero qualsia di porzioni di linee rette o curve di natura differente, e presentare quanti si vogliano cambiamenti bruschi di direzione. Perciò una funzione continua nell' intervallo $a \dots b$ può altresì assoggettarsi nello stesso intervallo ad altre svariate condizioni e rimanere poi ancora, se si voglia, non anche completamente determinata. Così, per esempio, rimane ancora molta arbitrarietà nel concetto di una funzione continua in $a \dots b$ che per alcuni tratti di questo intervallo debba avere dati valori ossia debba ivi coincidere con funzioni continue prestabilite. Ed invero possiamo concepire una infinità di linee differenti che vadano da α a β coincidendo in porzioni del loro corso con linee prefissate.

§. **18**. Consideriamo adesso le singularità che può presentare una funzione corrispondentemente ad un valore particolare c della variabile compreso in un intervallo $a \dots b$ dove la funzione debba in generale (cioè senza escludere eccezioni per certuni valori di x) essere continua ed avere un solo valore per ogni valore della variabile.

Se imagineremo che nella linea o filo $\alpha\beta$ si producano delle interruzioni, senza del resto che alcun suo punto esca dalla propria verticale, riconosceremo le singularità da chiamarsi *discontinuità* della funzione.

Imaginando dunque che una porzione $\gamma\delta$ (Fig. 3) del filo si stacchi da tutto il resto elevandosi od abbassandosi, come in $\gamma'\delta'$, otterremo un sistema di porzioni separate $\alpha\gamma, \gamma'\delta', \delta\beta$ che rappresenterà una funzione $\varphi(x)$ discontinua pei valori c e d di x. Finchè la lunghezza $\gamma'\delta'$ è sensibile, le due discontinuità sono

Fig. 3.



separate e basta considerarne una sola, come se l'intervallo cominciasse in a e finisse tra c e d. Mentre la variabile traversa in modo continuo il valore c la funzione salta dal valore $c\gamma$ al valore $c\gamma'$. Per $x=c$ alla funzione potranno ascriversi entrambi questi valori. Se qualche particolare considerazione portasse a riguardare di preferenza l'uno, per esempio $c\gamma'$, come vero valore della funzione, l'altro si presenterebbe però sempre inevitabilmente come limite dei valori della funzione allorchè la variabile si accostasse a c dalla banda di a. A designare, occorrendo, distintamente i due valori serviranno i simboli

$$\varphi(c-0) \quad , \quad \varphi(c+0)$$

suggeriti dalla riflessione che siffatti valori sono i limiti a cui tendono

$$\varphi(c-\varepsilon) \quad , \quad \varphi(c+\eta)$$

allorchè le quantità positive ε ed η tendono a zero.

Se la $\gamma'\delta'$ impiccolirà sino a ridursi ad un punto, allora si presenterà l'una o l'altra delle singularità rappresentate nelle figure 4 e 5, secondochè i termini γ e δ si troveranno

Fig. 4.

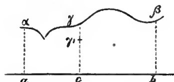
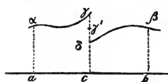


Fig. 5.



alla stessa altezza sopra Ox, o, per deformazioni avvenute in $\alpha\gamma$, $\delta\beta$, si troveranno ad altezze differenti. Nel caso della fig. 4, la funzione, per $x=c$, potrà ritenersi suscettibile dei due valori $c\gamma'$ e $c\gamma$, quest'ultimo almeno come limite dei valori che la funzione va prendendo nell'accostarsi di x a c. Nel caso della fig. 5, la funzione potrà ritenersi suscettibile dei tre valori $c\gamma$, $c\gamma'$, $c\delta$, che potrebbersi ordinatamente designare con

$$\varphi(c-0) \quad , \quad \varphi(c) \quad , \quad \varphi(c+0) \; .$$

§. 19. Imaginiamo adesso che la linea o filo $\alpha\beta$ nell' avvicinarsi indefinitamente alla verticale del punto c tanto da una banda come dall' altra si allontani senza limite da Ox, sopra o sotto cioè elevandosi od abbassandosi. Riconosceremo delle singularità diverse dalle precedenti e che chiameremo *infiniti* della funzione. Secondochè i valori della funzione prima e dopo di $x=c$ siano di segni eguali o contrari, la singularità dell' infinito si troverà rappresentata nell' una o nell' altra delle figure o delle due analoghe ove sarebbe negativo il valore della

Fig. 6.

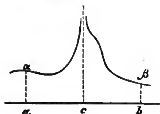
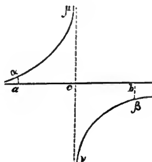


Fig. 7.



funzione prima di $x=c$.

La opportunità di distinguere queste singularità dalle precedenti apparirà con somma chiarezza nel seguito del nostro corso; ma anche sin d'ora possiamo osservarne non lievi indizi.

Avendo stabilito (§. 14) di non fare distinzione alcuna tra valori non finiti, possiamo anzitutto asserire che nei casi delle figure 6 e 7 alla funzione non può ascriversi che *un solo valore* per $x=c$. Ma possiamo anche asserire a dirittura il più riciso distacco fra i primi casi e questi, cioè asserire che si può rimuovere da questi ogni idea di discontinuità (*). Ed

(*) In ciò ci discostiamo dal comune modo di considerare, secondo il quale anche nelle singularità delle figure 6 e 7 vuolsi vedere discontinuità. Giusta il nostro modo, la funzione in questi casi non si dirà dunque *discontinua*, come è l' uso, ma *continua ed infinita* per $x=c$. Del resto, ciò che veramente importa non è già di comprendere o non com-

invero riflettiamo come si comporti la funzione allorchè x da un valore più piccolo passi in modo continuo ad un valore più grande di c. Mentre x cresce accostandosi a c, la funzione cresce (*), e finisce bensì per crescere tanto più rapidamente in confronto di x quanto più x s'approssima a c, ma non salta mai da un valore finito ad altro sensibilmente diverso, altrimenti bisognerebbe supporre che la linea o filo nel proprio corso asintotico alla verticale del punto c presentasse qualche interruzione. Mentre x traversa il punto o valore c, la funzione traversa il valore ∞, che al pari dello 0 è confine tra i numeri reali positivi ed i reali negativi. Ed allorchè x cresce da c verso b, la funzione dal valore ∞ ritorna a valori finiti, che possono essere tanto positivi che negativi, ed ancora senza alcun salto; imperocchè non passa mai da uno ad altro valore assegnabili senza passare per tutti i valori o numeri intermedi.

La singularità di una funzione φ espressa nella fig. 3 sparirebbe diminuendo il valor della funzione della costante $\varphi(c-0)-\varphi(c+0)$ per tutto l' intervallo $a \ldots c$. Quella espressa nella fig. 4 sparirebbe facendo astrazione dal valore $c\gamma'$ e considerando come valore della funzione il $c\gamma$; od in altri termini, e nel supposto che fosse soltanto $c\gamma'$ il valore veramente in prima ammesso per φ, la singularità della fig. 4 potrebbe togliersi *mutando il valor della funzione nel solo punto c* cioè dire pel solo valor c della variabile. Analoghe riflessioni pel caso della fig. 5. A togliere invece per addizione o sottrazione la singularità di una funzione ψ espressa nella fig. 6 o nella 7 sarebbe da mutarsi il valor della funzione di una quantità pure variabile con x, almeno in prossimità di c, cioè di una funzione $A(x)$ la quale, tendendo x a c, *diventasse infinita*

prendere le singularità che noi chiamiamo infiniti insieme con tutte le altre nel *genere* discontinuità, ma di distinguere e di potere in qualche modo designare quelle separatamente da queste. Alieni dal pretendere che la nostra innovazione venga adottata in generale, preghiamo soltanto che sia tollerata in un corso come questo, in cui reca particolari vantaggi.

(*) Per fissar le idee alludiamo alle figure 6 7; niun divario essenziale havvi nei casi delle due figure analoghe da noi tralasciate.

come la $\psi(x)$, vale a dire non differisse mai da ψ più che d' una quantità finita (*).

Le singularità delle figure 3, 4, 5 non possono provenire da operazioni algebriche da farsi sulla variabile, e quindi anche non si produrranno nè si toglieranno per la pura effettuazione di operazioni algebriche sulla funzione, mentre si potranno benissimo produrre o togliere con siffatte operazioni le singularità delle figure 6, 7. E quindi in particolare notiamo che, se una funzione φ sarà affetta da qualcuna delle singularità della prima sorta, ne sarà ancora affetta la reciproca $\frac{1}{\varphi}$; mentre, se una funzione sarà affetta da una singularità chiamata *infinito*, la reciproca non presenterà più alcuna singularità, rimanendo continua e finita per $x=c$ (**).

Infinita diverrebbe la funzione anche nei casi delle figure 3, 4. 5 quando, per esempio, uno dei punti γ, γ' riuscisse infinitamente lontano dal punto c; ma in questi casi la funzione diverrebbe infinita soltanto ove x s' avvicinasse a c da una delle due bande, mentre resterebbe finita avvicinandosi x a c dalla banda contraria (altrimenti si rientrerebbe nei casi delle figure 6, 7). Facendo traversare alla variabile il punto c la funzione in simili casi dovrebbe ancora fare un salto, infinito in cambio di finito. Abbracciando colla parola *discontinuità* questi casi indistintamente insieme con quelli di un salto finito, potremo però all' occorrenza distinguere gli uni dagli altri dicendo se la *discontinuità* sia *finita* o *infinita*.

(*) Tale sarebbe per esempio la

$$A(x)=\frac{2}{x-c} \quad \text{per} \quad \psi(x)=3-\frac{2}{\operatorname{sen}(x-c)}.$$

(**) Anche nelle teorie geometriche le dette singularità, che si possono togliere e produrre con deformazioni omografiche, non vengono considerate come discontinuità; così che, per esempio, tutte le coniche sono risguardate come ovali. Affinchè l' iperbole riesca descritta, come ovale, con moto continuo da un punto che mai non l' abbandoni, si imagina, precisamente come da noi nel caso della fig. 7, che, terminando di descrivere un ramo qual sarebbe $\alpha\mu$, il punto passi per l' infinito da μ a ν onde descrivere il ramo $\nu\beta$.

Termineremo avvertendo che le distinzioni e corrispondenti denominazioni stabilite, pei vari modi possibili di comportarsi delle funzioni allorchè la variabile traversa un valore c finito, devonsi intendere adottate anche per quando sia da imaginare che la variabile traversi il valore ∞, passando con ciò da valori positivi a negativi o viceversa. La funzione sarà da dirsi *continua e finita* ovvero *continua ed infinita* per $x = \infty$ ogni qualvolta in modo continuo essa tenda ad un'unico valore finito ovvero sorpassi col proprio modulo ogni grandezza finita, tanto coll' andare della variabile all' infinito per valori positivi quanto coll' andarvi per valori negativi. E sarà da dirsi *discontinua* in ogni altro caso.

§. **20.** In riguardo specialmente di quando una funzione sia data per mezzo di una espressione analitica conviene stabilire un criterio analitico da impiegarsi per decidere se *per un valor c della variabile una funzione $f(x)$ sia continua e finita,* vale a dire se il valor della funzione rimanga finito e soggetto alla continuità in un' intervallo piccolo quanto si voglia, ma ancora assegnabile, racchiudente il punto-valore c. Questo criterio può subito chiaramente desumersi dal confronto delle figure precedenti, considerando due ordinate mobili che vadano accostandosi all' ordinata fissa $f(c)$ l' una da una banda l' altra dall' altra. Ognuna di queste ordinate potrà ora allungarsi ed ora accorciarsi sensibilmente, ma, se la funzione è continua e finita nell' intervallo, vale a dire se la linea corre senza interruzioni ed a distanza finita sopra (o sotto) la porzioncella d' asse od intervallo suddetto, le due ordinate finiranno per subire variazioni minori di qualsia grandezza τ fissata piccola quanto si voglia. E viceversa, se si verifica questa proprietà, la funzione si potrà evidentemente dichiarare continua e finita entro l'intervallo e quindi pel valore c della x. Indicando pertanto con ε, η due quantità positive, pel criterio richiesto si potrà prendere la seguente proposizione: Perchè una funzione $f(x)$ sia continua e finita pel valor c di x è necessario e sufficiente che, qualunque sia la piccolezza assegnata a τ, si

possano sempre assegnare per ε ed η valori tali che per essi e per tutti gli altri più piccoli (*) riesca

$$f(c+\eta)-f(c-\varepsilon)<\tau .$$

Invece della espressione $f(x+\eta)-f(x-\varepsilon)$ si potrà anche esaminare la $f(x')-f(x)$, ritenendo però per $f(x)$ un solo invariabile valore e considerando per x' valori e più piccoli e più grandi di x (**). Vale a dire, una funzione f si potrà dichiarare continua e finita pel valore x della variabile allorchè, qualunque sia la piccolezza assegnata a τ, si possa prendere la differenza $x'-x$ tanto positivamente che negativamente così prossima a zero che per questi suoi valori e per tutti gli altri ancora più prossimi a zero riesca

$$f(x')-f(x)<\tau ,$$

$f(x)$ significando un solo invariabile valore.

Quando questa condizione sia soddisfatta per tutti i valori di x maggiori di a e minori di b la funzione potrà dirsi continua e finita nell' intervallo $a \dots b$.

§. 21. La continuità, esigendo puramente che la differenza $f(x')-f(x)=\Delta f(x)$ tenda a zero con $x'-x=\Delta x$, sembrerebbe non obbligare ancora di molto la maniera secondo cui $\Delta f(x)$ possa tendere a zero. Il semplice riflesso, che qua-

(*) Se dicessimo che per ogni τ debbansi poter prendere per ε ed η valori siffattamente piccoli da soddisfare alla condizione

$$f(c+\eta)-f(c-\varepsilon)<\tau ,$$

senz' altro aggiungere ; non escluderemmo la possibilità che la differenza $f(c+\eta)-f(c-\varepsilon)$ ingrandisse poi ancora con salti quali e quanti piacesse, oscillando incessantemente fra valori infinitamente piccoli e valori finiti prima di ridursi a 0 con ε ed η. Una funzione $f(x)$, che pei valori di x razionali, e cioè della forma $\frac{m}{n}$ essendo m e n interi primi tra loro, dovesse avere il valor 0 quando n fosse pari ed il valor 1 quando n fosse dispari, cadrebbe appunto nel detto caso e non sarebbe per certo a dirsi continua.

(**) Si sarà notato infatti essersi considerate due ordinate mobili, ossia la differenza $f(x+\eta)-f(x-\varepsilon)$, e non una sola, ossia la differenza $f(x+\eta)-f(x)$ dove η potesse essere o soltanto positiva o soltanto negativa, perchè la condizione $f(x+\eta)-f(x)<\tau$ potrebbe riuscire soddisfatta pur essendovi discontinuità. Un' ordinata mobile, per esempio, da d verso e nella fig. 3 non farebbe riconoscere discontinuità per $x=c$ se come valore di $f(x)$ si ritenesse ivi $c\gamma'$.

lunque potenza di Δx d' esponente reale positivo tende pure a zero con Δx, induce il pensiero che $\Delta f(x)$ possa tendere a zero in ragione finita con una potenza Δx^{μ} di Δx il cui esponente, rimanendo pur sempre positivo finchè la funzione sia continua e finita, possa mutare e colla natura della funzione e col valore di x. Ma è d' altronde notissimo che per le funzioni analitiche ordinariamente considerate e per tutti i valori di x, eccettuatine alcuni particolari a seconda della funzione, l'esponente μ è sempre l'unità. Facendo astrazione da espressioni analitiche e ricorrendo alla consueta rappresentazione geometrica, è noto del pari che, se la linea rappresentatrice della funzione ha da ammettere in generale per ogni suo punto una retta tangente, la differenza $\Delta f(x)$ delle due ordinate ha da tendere in generale a zero in ragione finita colla differenza Δx delle due ascisse. Tuttavia si riconoscerà che questo punto è lontano dal trovarsi adeguatamente discusso nei trattati di analisi infinitesimale. Nè noi crediamo di poterlo discutere in questa nostra sezione con bastante soddisfacimento; e però ci limitiamo a dirittura puramente a dimostrare, che, se l' esponente μ per una determinata funzione $f(x)$ in un determinato intervallo rimane costante, esso quivi non può avere che il valore 1. Pongasi, il che è lecito,

$$f(x+\Delta x)-f(x)=[\psi(x)+\eta]\,\Delta x^{\mu},$$

intendendo che $\psi(x)$ esprima quantità finita che non varia con Δx, ed η quantità che tende a zero con Δx e del cui segno, a diversità dal §. precedente, nulla si presuppone. Sieno a e b due quali si vogliano tra i valori di x nel detto intervallo, e, supponendo n numero intero positivo, pongasi nella precedente eguaglianza

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

ed x successivamente eguale a

$$a\,,\,a+\Delta x\;,\;a+2\,\Delta x\;,\;\ldots\ldots,\;a+(n-1)\,\Delta x\;.$$

Coll' addizione si otterrà

$$f(b)-f(a)=(\psi_1+\eta_1+\psi_2+\eta_2+\,..\,+\psi_n+\eta_n)\Delta x^\mu ,$$

dove ψ_m ed η_m significano ciò che divengono ψ ed η per $x=a+(m-1)\Delta x$. La ottenuta eguaglianza può scriversi come segue

$$f(b)-f(a)=\left(\frac{\psi_1+\psi_2+\,..\,+\psi_n}{n}+\frac{\eta_1+\eta_2+\,..\,+\eta_n}{n}\right)(b-a)\Delta x^{\mu-1}.$$

Ora, crescendo n, la media aritmetica delle quantità ψ, sempre tutte finite, rimane pure finita, e la media aritmetica delle η tende come ognuna di esse a zero. Perciò secondochè riesca

$$\lim \Delta x^{\mu-1}=0\,, \qquad =1\ ,\ =\infty$$

riuscirà

$$f(b)-f(a)=0\ ,\ \text{nè } 0 \text{ nè } \infty\ ,\ =\infty$$

Se dunque la funzione non ha da essere una costante (finita od infinita) nell' intervallo bisogna che sia

$$\lim \Delta x^{\mu-1}=1\ ,\ \text{cioè}\quad \mu=1\ .$$

La continuità dunque, sebbene lasci ancora una immensa arbitrarietà nel concetto di funzione, conduce tuttavia a questa conseguenza assai precisa, che in ogni intervallo assegnabile dove μ sia costante dev' essere $\mu=1$; e conduce quindi al concetto della funzione $\psi(x)$ od $f'(x)$ definita da

$$f'(x)=\lim_{\Delta x=0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{x'=x}\frac{f(x')-f(x)}{x'-x},$$

cioè al concetto della così detta funzione derivata. Questa conseguenza basterebbe da sola a far comprendere come siansi potuti stabilire importanti teoremi sulle funzioni, lasciando tuttavia nelle medesime l' anzidetta grande arbitrarietà.

Ammettendo pur sempre, come noi faremo, la esistenza della funzione derivata, non può esservi però difficoltà di concepire che per taluni valori particolari di x la $f'(x)$ possa riuscire nulla, o infinita, o discontinua senza che la $f(x)$ cessi di essere continua e finita. Per quanti si vogliano valori par-

ticolari di x il rapporto

$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x}$$

può tendere a limite diverso secondochè x' tenda a x da valori più piccoli ovvero da valori piu grandi di x. A riguardo di zeri e di infiniti, si possono, ad esempio, imaginare subito quante si vogliano funzioni algebriche (come in particolare $(z-c)^h$ per $z=c$, h significando numero reale positivo) le cui derivate riescano nulle od infinite per quanti valori particolari di x aggrada. E ritornando alla rappresentazione geometrica, si possono imaginare innumerevoli linee continue che dovunque nel loro corso e quante volte più piaccia riescano parallele od ortogonali all'asse $0x$ o cambino bruscamente di direzione, le quali particolarità appunto esprimono o zeri, o infiniti, o discontinuità nelle successioni dei valori delle derivate delle funzioni ch' esse linee rappresentano. I valori di x, pei quali la derivata di una funzione fosse nulla, o infinita, o infinitamente discontinua, potrebbero risguardarsi come valori o punti terminanti intervalli entro ciascuno dei quali l' esponente μ per la funzione si conserva senza eccezione eguale all' unità. Le discontinuità finite (della derivata) non implicano per niente affatto interruzione nel valore 1 del detto esponente.

CAPITOLO SECONDO

Funzioni reali di più variabili reali.

§. 22. Le cose dette per le funzioni di una variabile reale si possono estendere facilmente a funzioni di due, tre,... variabili reali. Fermiamoci sulle funzioni di due variabili, occorrendocene l' uso nello studio delle funzioni di una variabile affatto libera.

Sieno x, y due variabili reali indipendenti tra loro; se si imagina che ad ogni coppia di valori particolari di esse corrisponda, almeno entro certi confini, uno o più valori di una terza quantità f, questa si dice funzione di quelle, e si direbbe funzione analitica quando si volesse alludere ad una espressione analitica del legame tra questa e quelle. Anche qui consideriamo funzioni che in generale sono soggette alla continuità e supponiamo che per ogni coppia (x, y) siavi generalmente un solo valore per f.

Quanto alla continuità contentiamoci di considerarla nella ordinaria rappresentazione geometrica delle funzioni di due variabili reali. Imaginiamo dunque il solito piano orizzontale, nel quale per adesso gli assi reale ed imaginario verranno chiamati assi delle x e delle y, ed ogni punto verrà considerato come rappresentativo non di un valore di una variabile complessa $(x + yi)$ ma di una coppia di valori di due variabili reali x, y e perciò designato col simbolo stesso (x, y) della coppia. La lunghezza della verticale eretta sul punto (x,y) rappresenterà il valore della funzione corrispondente alla coppia (x, y) di valori delle variabili, e l' insieme delle verticali o più semplicemente la superficie determinata dalle loro estremità rappresenterà la funzione compiutamente. Per concepire che una funzione *f sia data su S*, cioè dire che sia determinata per tutte le coppie di valori di x e y rappresentate da punti contenuti nella porzione S del piano, potremo imaginare che sia data una superficie Σ di cui la projezione sul piano sia S. Qualunque possa essere la forma di Σ essa individuerà pur sempre una funzione di x e y. La funzione f sarà detta *continua su S* qualora Σ non presenti alcuna interruzione di continuità, qualora cioè Σ sia tale che con essa e colla S e colla superficie cilindrica verticale che insiste sul contorno di S una porzione dello spazio riesca totalmente separata da tutto lo spazio rimanente. Ma del resto la Σ potrà avere, lo ripetiamo, forma qualunque; potrà essere, per esempio, una porzione di un' unica superficie algebrica, ovvero essere com-

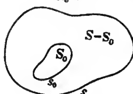
posta di un numero qualsia di porzioni di superficie piane o curve di natura differente e presentare spigoli ed angoli quanti si vogliano. Perciò una funzione continua su S può altresì assoggettarsi su S ad altre svariatissime condizioni, che tuttavia, se si voglia, non ancora la determinino completamente. Se, per esempio, imaginiamo che su due parti S_0 e S_1 di S sieno date rispettivamente due funzioni continue $A_0(x, y)$ e $A_1(x, y)$, possiamo concepire quante vogliamo funzioni distinte e tutte continue su S le quali su S_0 e S_1 coincidano rispettivamente con $A_0(x, y)$ e $A_1(x, y)$. Ed invero possiamo concepire quante vogliamo superficie Σ, continue sopra S, le quali sopra S_0 e S_1 coincidano con due superficie ivi date e perciò anche tra loro, ma sieno poi affatto distinte sopra altre parti di S. Rimarrebbe ancora illimitato il numero delle superficie Σ continue sopra S e coincidenti sopra S_0 e S_1 colle due date, se anche ne supponessimo prefissato il contorno, cioè la linea che ha per projezione sul piano il contorno di S. Ciò significa essere illimitato il numero delle funzioni continue su S che su S_0 e S_1 coincidono con due date funzioni $A_0(x, y)$ e $A_1(x, y)$ e che hanno sul contorno di S valori prefissati.

§. 23. Anche nel caso di funzioni di due variabili per riconoscere le discontinuità, che una funzione può presentare corrispondentemente a coppie di valori delle variabili rappresentate da punti compresi in una porzione S del piano sulla quale la funzione debba in generale (cioè senza escludere eccezioni su punti o su linee) essere continua ed avere un solo valore per ogni punto, basta riflettere alle interruzioni che si possono produrre nella superficie Σ senza che alcun suo punto esca dalla propria verticale.

Imaginiamo che una porzione Σ_0 di Σ venga disgiunta, per mezzo di un taglio, dalla restante porzione $\Sigma - \Sigma_0$ e spinta verticalmente in su (od in giù), nella qual nuova posizione la designeremo con Σ_0'. Ne risulterà un sistema di pezzi di superficie separati, il quale rappresenterà una funzione disconti-

nua su di una linea s_0 (Fig. 8), cioè per tutte le coppie di valori delle variabili rappresentate da punti della projezione s_0 del taglio imaginato nella Σ sul piano orizzontale. Se il punto (x, y) si accosterà alla linea s_0 dall' interno di S_0, il valor della funzione tenderà ad essere rappresentato da verticale terminata superiormente nel contorno σ_0' di Σ_0', contorno che è uno degli orli del taglio. Se invece il punto (x, y) s'accosterà ad s_0 dall'interno di $S—S_0$, il valor della funzione tenderà ad essere rappresentato da verticale terminata all'altro orlo σ_0 del taglio, orlo che insieme col contorno σ della primiera superficie Σ forma l' intero contorno del pezzo $\Sigma — \Sigma_0$.

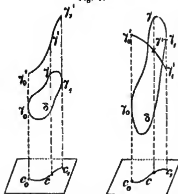
Fig. 8.



Per ottenere tutte le varie sorta di discontinuità basta fare, come già pel caso d' una sola variabile, tutte le diverse supposizioni possibili circa la forma e posizione di Σ_0'. A motivo delle due dimensioni evvi però nel presente caso maggiore varietà: si potrà supporre infinitamente piccola una sola, ovvero sì l' una che l' altra delle dimensioni di Σ_0'. Nella prima supposizione si avrà una discontinuità lungo una linea, nella seconda una discontinuità in un solo punto. E riflettasi che qui pure, come già per la $\gamma'\delta'$ e le restanti porzioni della linea rappresentatrice d' una funzione d' una sola variabile, è anche da imaginarsi che, senza ledere la continuità nel pezzo Σ_0', i suoi punti, e però in particolare quelli dell' orlo σ_0', sieno stati spostati, nel distacco del pezzo dalla rimanente superficie $\Sigma—\Sigma_0$, di una quantità variabile da punto a punto; come pure che siensi effettuati spostamenti senza lesione alla continuità (ossia variabili per gradi insensibili da punto a punto) nei punti di $\Sigma — \Sigma_0$ e però in particolare nei punti dell'orlo σ_0. Perciò, allorchè una dimensione di Σ'_0 riducesi infinitamente piccola, cioè Σ'_0 riducesi ad una linea $\gamma_0'\gamma_1'$ (Fig. 9) (*), le

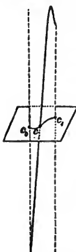
(*) La figura presenta due fra tutte le possibili situazioni rispettive di $e_0 e_1$, $\gamma_0 \gamma_1$, $\gamma_0'\gamma_1'$ ossia s_0, σ_0, σ_0'. Le linee s_0 e σ'_0 sono rappresentate come aperte, ma potrebbero anche essere rientranti, e la σ_0 non constare di una sola rientrante. Potevasi, per esempio, imaginare precedentemente la Σ_0 e quindi la S_0 conformate a dipresso come corone.

Fig. 9.



due porzioni dell' orlo σ_0, che si congiungono nelle verticali estreme $c_0\gamma_0$ e $c_1\gamma_1$, possono anche non ridursi (analogamente, al caso della fig. 5 per una sola variabile) a coincidenza tra loro, ma costituire una linea rientrante $\gamma_0\delta\gamma_1\gamma\gamma_0$ che abbia due punti in ogni verticale eretta su s_0. Inoltre, riducansi o no a coincidenza le dette porzioni dell' orlo σ_0, è chiaro che le distanze fra i punti più alti ed i più bassi di σ_0, non che di σ_0' possono anche imaginarsi (Fig. 10) grandi quanto si vuole, ed anche vie più crescenti quanto più decresca la lunghezza di s_0; sì che sopra un brevissimo tratto s_0 del piano orizzontale la funzione venga ad ammettere tutti quanti i valori compresi fra due estremi che differiscano considerabilissimamente l' uno dall' altro. E però, se si supponga che s_0 diventi infinitamente corta cioè si riduca ad un punto c, si riconosce fra le varie sorta di discontinuità anche questa, che una funzione ammetta tutte quante le grandezze positive e negative come suoi valori in un punto c, mentre tutt' intorno al medesimo sia continua ed abbia un valor solo. Ciò si verifica, per esempio, pel punto o coppia $(0,0)$ nell' una e nell' altra delle espressioni analitiche

Fig. 10.



$$e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \cos\frac{y}{x^2+y^2}\ ,\quad e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot \operatorname{sen}\frac{y}{x^2+y^2}\ (^*).$$

Il parallelogrammo rappresenta una porzione di *S*.

(*) Queste espressioni sono la parte reale ed il coefficiente di i della funzione

$$e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{1}{x+yi}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} \cdot e^{-\frac{y}{x^2+y^2}i}$$

a cui già mostrammo nel §. 15 potersi attribuire qualunque valore complesso per $z=0$.

Ma tralasciamo ormai ogni ulteriore discussione delle discontinuità e passiamo a considerare gl' infiniti.

§. **24**. Riconosceremo le singularità da chiamarsi infiniti di una funzione di due variabili imaginando che la superficie rappresentativa Σ nell' accostarsi per qualsia banda alla superficie cilindrica formata dalle verticali erette su di una linea l esistente in S si allontani senza limite dal piano orizzontale, nello stesso senso o in sensi diversi, potendo si elevarsi sopra il piano che abbassarsi sotto di esso indefinitamente.

La linea l potrebbe supporsi ridotta ad un punto ed allora la funzione sarebbe infinita non sopra una linea ma in un punto.

Anche per una funzione di due variabili noi diciamo che divenendo infinita non cessa di essere continua, e riteniamo come fatte anche per esse tutte in generale le considerazioni circa le differenze fra le singularità da chiamarsi discontinuità (comunque sieno: finite, infinite, lungo linee, in punti) e quelle da chiamarsi infiniti.

La espressione analitica

$$\psi(x,y)=x^2y^2+7+\frac{3}{x^2+y^2-4}$$

rappresenta una funzione continua senza eccezioni, infinita per le coppie di valori di x e y che rendono $x^2+y^2-4=0$ cioè lungo la circonferenza di centro $(0,0)$ e di raggio 2, ed infinita anche per ogni coppia di valori che non sieno entrambi finiti.

La espressione

$$\psi_1(x,y)=2+\frac{5x}{(x-1)^2+(y-3)^2}$$

rappresenta una funzione continua senza eccezione ed infinita soltanto nel punto $(1,3)$.

Sottraendo dalla ψ la funzione

$$A(x,y)=\frac{3}{x^2+y^2-4}$$

si otterrebbe una funzione che non sarebbe più infinita sulla circonferenza $x^2+y^2-4=0$. Perciò si potrà dire che la $A(x,y)$ *diventa infinita come la* $\psi(x,y)$ sulla circonferenza anzidetta. Sopra ogni altra parte del piano la $A(x,y)$ è finita, oltrechè continua. Se dalla ψ si sottraesse anche una funzione che divenisse infinita come ψ pei valori non finiti di x e y, rimanendo però per tutti gli altri valori finita oltrechè continua, il resto dovrebbe evidentemente rimanere continuo e finito senza eccezione per tutti i valori finiti e non finiti delle variabili; esso sarebbe la costante 7 ove la funzione sottratta fosse la x^2y^2.

Una funzione che nel punto (1, 3) diviene infinita come la $\psi_1(x,y)$, rimanendo inoltre dappertutto altrove finita oltrechè continua, sarebbe la

$$A_1(x,y)=\frac{5x}{(x-1)^2+(y-3)^2}.$$

Per ciò che fu detto nel §. 22 è affatto chiaro potersi concepire quante si vogliano funzioni di x e y su S, le quali abbiano in certi punti e su certe linee di S discontinuità od infiniti prefissati (o, in altri termini, le quali sieno discontinue od infinite in certi punti ed in certe linee come funzioni date) e sieno su ogni altra parte di S continue e finite.

§. 25. Designando con f una funzione continua e finita sopra S (e che già sottintendesi sempre per adesso con un sol valore per ogni punto) ed essendo (x,y) e (x',y') due punti qualunque di S, la differenza

$$f(x',y')-f(x,y)$$

tende a zero coll'accostarsi di (x',y') a (x,y) ossia col tendere a zero della distanza

$$V=\left[(x'-x)^2+(y'-y)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

e si presenta ancora la domanda, con qual potenza di questa distanza tenda a zero in ragion finita la differenza. Questa do-

manda rientra subito in quella che si riferisce ad una sola variabile, e dalla quale fummo condotti al concetto di funzione derivata, di cui già avvertimmo ammettersi qui in generale la esistenza. Nel caso d' una sola variabile il punto x' non poteva giungere in x che secondo due direzioni contrarie, cioè le direzioni dell' asse Ox; nel presente caso invece il punto (x', y') può giungere in (x, y) secondo una infinità di direzioni differenti, fra le quali le due dell' asse Ox e le due del Oy. Imaginando che (x', y') giunga in (x, y) parallellamente a Ox, supporremo $y' = y$ nella differenza della funzione e saremo condotti al concetto della derivata parziale rispetto a x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x'=x} \frac{f(x', y) - f(x, y)}{x' - x}.$$

Giungendovi invece parallellamente a Oy ne scaturisce la derivata parziale rispetto a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{y'=y} \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y}.$$

Per qualunque altra direzione si suole, come è noto, profittare della identità

$$\frac{f(x', y') - f(x, y)}{\nabla} = \frac{f(x', y') - f(x, y')}{x' - x} \frac{x' - x}{\nabla} + \frac{f(x, y') - f(x, y)}{y' - y} \frac{y' - y}{\nabla}$$

per conchiudere che

$$\lim \frac{f(x', y') - f(x, y)}{\nabla} = \frac{\partial f}{\partial x} \lim \frac{x' - x}{\nabla} + \frac{\partial f}{\partial y} \lim \frac{y' - y}{\nabla}.$$

Se si ritenesse ∇ in ogni caso positiva, i limiti che figurano nel secondo membro sarebbero in ogni caso i coseni degli angoli che la retta che va da (x, y) a (x', y') forma colle direzioni positive degli assi. Imaginando che (x, y) debba essere il punto qualunque di una linea l tracciata in S e (x', y') punto successivo nella stessa linea, sì che $\pm\nabla$ sia l' incremento dl dell'arco di essa avente principio in un punto fisso e termine nel punto (x, y), le variabili x, y, f potranno risguardarsi come

funzioni di l e si potrà scrivere la precedente eguaglianza sotto la solita forma

$$(1) \qquad \frac{df}{dl}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dx}{dl}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dl}\,. \qquad (*)$$

Se dl riuscisse negativa cioè se la lunghezza l decrescesse nella direzione da (x,y) a (x',y') i quozienti differenziali $\frac{dx}{dl}$, $\frac{dy}{dl}$ sarebbero di valor contrario ai coseni degli angoli che la detta direzione forma colle direzioni positive degli assi. In forza di questi quozienti differenziali o coseni, legati dalla relazione

$$\left(\frac{dx}{dl}\right)^2+\left(\frac{dy}{dl}\right)^2=1,$$

ma tuttavia variabili colla direzione di dl, il secondo membro della (1) cambia generalmente di valore al cambiare di detta direzione, laonde si potrà dire che, mentre una funzione di una sola variabile x dà luogo ad una sola derivata, ossia, in altre parole, ad una derivata che possiede in generale un solo valore per ogni valore di x, una funzione di due variabili x e y dà luogo ad una infinità di derivate, ossia ad una derivata che ammette in generale una infinità di valori per ogni punto o coppia di valori di x e y.

Che in queste derivate la continuità della funzione non

(*) Si sa che, mentre le derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ diconsi parziali perchè provenienti l'una da variazione della sola x e l'altra da variazione della sola y, la derivata $\frac{df}{dl}$ si suol dire totale, perchè può imaginarsi proveniente da variazioni simultanee quali si vogliano di entrambe le variabili x e y. Si sa pure che, al pari delle derivate, i tre differenziali

$$df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy\ ,\ \ \frac{\partial f}{\partial x}dx\ ,\ \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

soglionsi rispettivamente chiamare differenziale totale, differenziale parziale rispetto a x, differenziale parziale rispetto a y.

vieti nè infiniti, nè discontinuità, è evidente, sia riflettendo al già esposto pel caso d' una sola variabile, sia riflettendo che una superficie Σ rappresentatrice d' una funzione continua può avere spigoli ed angoli quanti si vogliano e che la $\frac{df}{dl}$ esprime il coseno dell' angolo che la retta tangente la superficie nella verticale di (x, y) e diretta secondo il piano verticale di dl forma colla dl stessa.

Traduciamo finalmente, ancora per il seguito, parte del già detto sotto la forma che segue. Nel caso d' una sola variabile x, avendosi due funzioni $f(x)$ e $\zeta(x)$ e prendendo x' infinitamente vicino a x, il rapporto

$$\frac{f(x')-f(x)}{\zeta(x')-\zeta(x)}=\frac{\dfrac{f(x')-f(x)}{x'-x}}{\dfrac{\zeta(x')-\zeta(x)}{x'-x}}$$

ha generalmente un solo valore per ogni punto x; valore, funzione di x, che può esprimersi con

$$\frac{\dfrac{df}{dx}}{\dfrac{d\zeta}{dx}} \quad \text{ovvero con} \quad \frac{df}{d\zeta}$$

e chiamarsi derivata di f rispetto a ζ. Nel caso invece di due variabili, ciò che per analogia sarebbe a dirsi derivata di $f(x, y)$ rispetto a $\zeta(x, y)$, vale a dire il rapporto

$$\frac{f(x', y')-f(x, y)}{\zeta(x', y')-\zeta(x, y)}=\frac{df}{d\zeta}=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dl}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dl}}{\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}\dfrac{dx}{dl}+\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}\dfrac{dy}{dl}}$$

ammette una infinità di valori per ogni punto (x, y), sempre a motivo della variabilità delle $\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}$. A giudicare più facilmente

l' influenza della direzione dl sul valore della derivata può esser utile di scrivere questa nella seguente maniera

$$\frac{df}{d\zeta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}}{\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}},$$

in cui figura una sola quantità variabile colla direzione, cioè la quantità $\frac{dy}{dx}$, che esprime la tangente dell' angolo di dl con Ox e che può prendere tutti i valori reali. La condizione necessaria e sufficiente perchè il valore della derivata $\frac{df}{d\zeta}$ fosse indipendente dalla direzione, ossia perchè il valore del secondo membro della precedente eguaglianza fosse indipendente dal valore di $\frac{dy}{dx}$, è la seguente

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \zeta}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial \zeta}{\partial y}}$$

Questa condizione troverebbesi già, e quindi la $\frac{df}{d\zeta}$ rimarrebbe affatto invariata variando il valore di $\frac{dy}{dx}$, anche soltanto supponendo che il secondo membro della suddetta eguaglianza, conservasse lo stesso valore per *due* diversi valori di $\frac{dy}{dx}$, cioè dire per due direzioni diverse e non contrarie.

CAPITOLO TERZO

Funzioni complesse di variabili reali.

§. 26. Per funzione complessa d' una variabile reale x si intende una variabile complessa di cui tanto la parte reale quanto il coefficiente di i sieno funzioni reali di x. È chiaro che una teorica di siffatte funzioni non sarebbe altro ancora che una teorica di funzioni reali (la parte reale ed il coefficiente di i) di una variabile reale. Noi non ci fermeremo su di esse e soltanto faremo riflettere, che, in una distinzione delle funzioni di una variabile reale in reali e complesse, una stessa legge di dipendenza analitica potrà comparire sì nell' una che nell' altra classe, cioè dare luogo ora a funzione reale ora a funzione complessa a seconda dell' intervallo in cui si imagina esistente la variabile. La espressione, per esempio, $2x+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ si presenta come funzione reale allorchè s'imagina x esistente nell' intervallo $-1 \ldots +1$, come funzione complessa in ogni altro caso. Per rappresentare geometricamente una funzione complessa in maniera affatto analoga a quella per funzioni reali, bisognerebbe imaginare, non una, ma due linee verticalmente al disopra di $0x$, una delle quali rappresentasse la parte reale e l' altra il coefficiente di i della funzione complessa.

Per funzione complessa di due variabili reali s' intende una variabile complessa di cui e la parte reale e il coefficiente di i sieno funzioni reali di due variabili reali. Anche sopra funzioni di tal sorta, per motivo affatto analogo al dianzi esposto,

non occorre che ci soffermiamo. A rappresentarle geometricamente, in maniera simile alla già impiegata per le funzioni reali di due variabili, sarebbero da considerarsi due superficie al disopra del piano orizzontale, una per la parte reale e l'altra pel coefficiente di i della funzione complessa.

CAPITOLO QUARTO

Funzioni di una variabile complessa.

§. 27. Imaginando che la variabile indipendente possa prendere qualunque valore aritmeticamente possibile, dobbiamo ben riflettere qual sia la definizione di funzione che con perfetta analogia scaturisca dal caso di variabile reale, e se dessa porti seco caratteri che indubbiamente la qualifichino come atta a servire di base ad una teorica importante.

Se fin dal principio non s'intendesse alludere ad altro fuorchè ad espressioni analitiche, la cosa parrebbe non richiedere una singolare attenzione. Funzione analitica di una variabile reale x si dice qualsia altra variabile i cui singoli valori si possano ottenere coll' eseguire su ogni singolo valore della x un medesimo sistema di operazioni analitiche (*). Funzione analitica di una variabile complessa $z = x + yi$ parrebbe quindi da dirsi, affatto analogamente, qualsia altra variabile i cui singoli valori si possono ottenere coll' eseguire su ogni singolo valore di z, ossia di $x + yi$, un medesimo sistema di operazioni analitiche.

(*) Per maggior semplicità qui alludiamo di preferenza a funzioni esplicite, ma con qualche cambiamento di parola resterebbero apertamente abbracciate anche le implicite. Abbiamo pure creduto di non allungare la locuzione per riferirci dichiaratamente anche al quando si presentino diversi sistemi di operazioni analitiche per la determinazione di una medesima funzione in diversi intervalli.

Ma la cosa sembrerà meno ovvia quando vogliasi porre una definizione che non involga anticipatamente l' idea della esprimibilità analitica.

§. **28**. Allorchè Cauchy prendeva a considerare i numeri complessi come *quantità geometriche*, egli era tratto naturalmente a considerare le variabili complesse come quantità geometriche variabili, e quindi a risguardare come *funzione* di una variabile complessa z qualunque quantità geometrica w il cui valore riuscisse determinato da quello della quantità geometrica z, od in altri termini, a risguardare w come *funzione* di z ogniqualvolta la posizione del punto z (nel solito piano) determinasse la posizione del punto w (*).

Ma è facile riconoscere che questa definizione è larga più del convenevole. Consideriamo una qualunque espressione analitica f contenente almeno due lettere p e q che si possano riguardare come simboli di variabili continue. Riguardando effettivamente p e q come variabili, ed ammettendo la esposta definizione, la f od $f(p,q)$ verrebbe a schierarsi tanto nella classe delle funzioni di *due* quantità quanto nella classe delle funzioni di *una* quantità. Si presenterebbe in quest' ultima classe, e sarebbe cioè funzione dell' unica quantità $p+qi$, ogniqualvolta piacesse restringere mentalmente la variabilità delle p e q a valori reali. Senza questa restrizione la $f(p, q)$ andrebbe inevitabilmente, in generale, tra le funzioni di due quantità p e q.

Vedremo fra breve come debbasi modificare la definizione di Cauchy perchè ogni formola contenente le lettere p e q non possa dirsi funzione di $p+qi$ tostochè queste lettere si risguardino come simboli di variabili reali, ma allora soltanto che per *qualunque* significato di p e q essa formola possa pur *sempre* annoverarsi con tutta ragione tra le funzioni del binomio $p+qi$.

Ed intanto notiamo come già dal solo riflesso che ogni

(*) Vedi l' articolo *Sur les fonctions des quantités géométriques* nel tomo 4 degli *Exerc. d' An. et de Phys. math.*, già citato a pag. 69, ecc. delle *Notizie*.

funzione di due variabili reali x e y sarebbe anche funzione dell' unica variabile complessa $x+yi$, emerga ad evidenza che non vi potrebbe essere alcun interesse di costruire una speciale teorica delle funzioni di una variabile complessa, che sarebbe semplicemente la teorica delle funzioni di due variabili reali.

§. **29**. Per stabilire la definizione di funzione d' una variabile complessa nel §. 1 della propria dissertazione inaugurale, il sig. Riemann comincia ad osservare che, mentre è tutt' uno, come già si è detto, definire la dipendenza di una variabile da altra variabile reale *con* ovvero *senza* la supposizione che quella sia ottenibile mediante un sistema di operazioni analitiche da eseguirsi su questa, non è più così quando le variazioni della variabile indipendente non si limitino a valori reali.

Ed invero, ammesso *puramente* che $w=u+vi$ *dipenda* da $z=x+yi$, cioè in modo che il valor di z determini il valor di w (*), se si considerano due valori della z, $x+yi$ e $x+yi+dx+dyi$, infinitamente vicini, ai quali corrispondano per w i valori $u+vi$ e $u+vi+du+dvi$, il rapporto

$$\frac{dw}{dz}=\frac{du+dvi}{dx+dyi}$$

muterà, in generale, di valore al mutarsi della direzione secondo cui il punto $z+dz$ nel solito piano verrà a coincidere col punto z, ossia, in altri termini, muterà al mutarsi della *direzione del differenziale* dz (**). Ciò può ridursi a maggiore

(*) Per la qual cosa basta, come si disse, che u e v sieno due funzioni reali qualunque delle due variabili x e y.

(**) Questo potrebbe riguardarsi come un caso particolare di ciò che si è già osservato alla fine del §. 23. Si cade infatti nel presente caso imaginando che f sia w e che $\zeta(x, y)$ sia $x+yi$. Ivi propriamente f e ζ erano supposte reali, ma è chiaro che si possono anche supporre complesse La condizione ivi data, affinchè il quoziente differenziale $\frac{df}{d\zeta}$ avesse un solo valore per ogni coppia (x,y), prenderebbe per $\frac{\partial\zeta}{\partial x}=1$ e $\frac{\partial\zeta}{\partial y}=i$ la forma (1) del presente paragrafo.

evidenza riflettendo che si ha

$$\frac{du+dv\,i}{dx+dy\,i}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)i}{dx+dy\,i}=$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)i$$

$$+\left[\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)i\right]\frac{dx-dy\,i}{dx+dy\,i},$$

e che, se sia θ l' argomento del differenziale $dx+idy$, si ha

$$\frac{dx-dy\,i}{dx+dy\,i}=e^{-2\theta i}.$$

Ma, in qualunque modo w si possa comporre con z mediante le semplici operazioni di calcolo, il valore del quoziente differenziale $\frac{dw}{dz}$ è sempre indipendente dalla direzione del differenziale dz (*); dunque, mediante le semplici operazioni di calcolo, non si può esprimere una dipendenza qualunque della quantità complessa w dalla quantità complessa z.

E però, non volendo porre una definizione per la quale, contrariamente al caso di variabile reale, resti esclusa anticipatamente, in generale, la possibilità di esprimere le funzioni per mezzo d' un sistema di operazioni di calcolo sulla variabile, il sig. Riemann, avuto riguardo all' anzidetta proprietà, stabilisce la seguente definizione: *una variabile complessa w si dirà funzione di un' altra variabile complessa z, quando vari con questa in modo che il valore della derivata $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente dal valore del differenziale dz.*

(*) Sono sempre riflessioni del sig. Riemann. In quanto all'ora asserita indipendenza, la *Dissertazione* porta la seguente nota. « Questa proposizione è evidentemente giustificata in tutti i casi nei quali dall' espressione di w si può per mezzo delle regole di derivazione trovare un' espressione di $\frac{dw}{dz}$ in funzione di z; in questo senso per adesso lo riterremo vera rigorosamente e generale.

Condizione necessaria e sufficiente per siffatta indipendenza è che sia nullo il moltiplicatore di

$$\frac{dx - dy\,i}{dx + dy\,i}$$

nella precedente espressione di $\frac{dw}{dz}$, il che può compendiarsi nella

$$(1) \qquad i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

E però la esposta definizione può anche presentarsi nei termini seguenti, che si vedranno usati dal sig. Riemann nel tomo 54 del giornale di Crelle-Borchardt (*): *funzione di* $x+yi$ *dicesi qualunque quantità* w *che vari con* $x+yi$ *in modo da soddisfare la* $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$; senza, già s' intende, presupporre veruna espressione analitica di w per mezzo di x e y.

§. **30**. A rendere vie più manifesta la opportunità della definizione del sig. Riemann ritorniamo adesso a considerare una espressione analitica $f(p,q)$, come nel §. 28, e cerchiamo sotto qual condizione potrebbe riputarsi incontrastabilmente lecito, giusta l' ordinario concetto di funzione, di dichiarare la $f(p,q)$ *funzione dell' unico ente* $p+qi$ qualunque possa essere d' altronde la variabilità che piacesse di concepire nelle p,q. Manifestamente ciò avrebbe luogo quando il valore di $f(p,q)$ dipendesse assolutamente (cioè senza alcuna restrizione mentale) dal valore dell' unico ente $p+qi$; si che fissato il valore di questo ente, rimanesse fissato il valore di $f(p,q)$, comunque si prendessero o si mutassero i valori delle singole quantità p e q che devono concorrere a costituire il prescritto valore di $p+qi$. Sia c, per una volta qualunque, questo prescritto valore. Se p e q si assoggettassero alla restrizione di non

(*) Osservisi l' articolo: *Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel für die Untersuchung von Functionen unbeschränkt veränderlicher Grössen.*

prendere che valori reali, l'equazione $p+qi=c$ basterebbe per determinare p e q, assegnando a p la parte reale ed a q il coefficiente di i del numero c. Ma, dal punto di vista di una variabilità affatto libera per p e q, la sola equazione precedente è ben lontana dal bastare alla determinazione dei valori di p e q. Ed invero se p, q esprima *una* soluzione della equazione $p+qi=c$, si potrà aggiungere a p una quantità complessa qualsivoglia h, che, aggiungendo nel tempo stesso a q la quantità hi, si avrà ancora una soluzione della detta equazione. Perciò ad un solo valore c dell' ente $p+qi$ corrisponderebbero in generale per f tutti i valori ricavabili da

$$f(p+h\ ,\ q+hi)$$

coll' attribuire ad h tutti i valori aritmeticamente possibili. Dunque, volendo rigettare ogni restrizione mentale circa la variabilità delle p e q, la quantità espressa dalla formola $f(p,q)$ allora soltanto si potrebbe incontrastabilmente dichiarare *funzione di* $p+qi$ quando il valore di h non influisse sul valore di $f(p+h\ ,q+hi)$, cioè quando rimanesse

$$(1) \qquad f(p+h\ ,\ q+hi)=f(p,q)$$

comunque variasse h.

La stessa condizione otterrebbesi anche nella seguente maniera. Si vuol determinare in quali casi la $f(p,q)$, che in generale esprime il risultato di un sistema di operazioni analitiche da eseguirsi sulle due quantità o lettere p e q, possa anche qualificarsi come esprimente il risultato di un sistema di operazioni analitiche da eseguirsi sulla quantità unica $p+qi$. Indicando ancora con c il binomio $p+qi$, acciocchè f possa risultare da un sistema di operazioni da eseguirsi su c è necessario, del pari che sufficiente, che mediante l'impiego della lettera c si possano far sparire dalla formola f entrambe le lettere p e q. Questo equivale a dire che, ponendo nella $f(p,q)$ invece della lettera p ciò che si cava per essa dalla $p+qi=c$, deve

sparire nel tempo stesso anche la q (*). Deve dunque essere

$$f(c-qi\ ,\ q)$$

affatto indipendente dalla lettera q, o, ciò che è lo stesso, crescendo q di hi deve rimanere

$$f(c-qi+h\ ,\ q+hi)=f(c-qi\ ,\ q)$$

qualunque sia h; il che, ponendo p in luogo di $c-qi$, coincide a pieno, come dicemmo, colla già trovata condizione.

Invece della (1) possiamo scrivere, siccome affatto equivalente, la condizione

$$(2)\qquad \frac{df(p+h\ ,\ q+hi)}{dh}=0$$

ossia

$$(3)\qquad \frac{\partial f(p+h\ ,\ q+hi)}{\partial\,(p+h)}+\frac{\partial f(p+h\ ,\ q+hi)}{\partial\,(q+hi)}\,i=0\,,$$

la quale, sostituendo le lettere P e Q ai due binomi $p+h$ e $q+hi$, assume l' aspetto

$$(4)\qquad \frac{\partial f(P,Q)}{\partial P}+\frac{\partial f(P,Q)}{\partial Q}\,i=0 \quad \text{ovvero} \quad i\,\frac{\partial f(P,Q)}{\partial P}=\frac{\partial f(P,Q)}{\partial Q}\,,$$

che coincide perfettamente coll' aspetto della (1) del §. 29.

Tuttavia non dobbiamo ommettere di osservare che, mentre nella (1) del §. 29 le due derivate parziali, per la supposta natura reale di x e y, s' intendono provenienti da incrementi *reali* di x e y, nella (4), considerata come conseguenza della (2) o (1) (del presente §), le derivate parziali provengono da incrementi di P e Q della forma dh e idh, dei quali uno almeno è inevitabilmente *non reale*. E però, mentre in riguardo

(*) Se la f si trovasse già sotto l' aspetto $\varphi\,(p+qi)$ di un sistema φ di operazioni da eseguire su $p+qi$, la sua esprimibilità per mezzo della sola c sarebbe affatto evidente. Ma non così lo sarebbe quando l' aspetto $\varphi\,(p+qi)$ fosse stato alterato dall' effettuazione di talune operazioni, quali, per fissar le idee, potrebbero occorrere per separare la parte che, nell' ipotesi di p e q reali, sarebbe reale dalla imaginaria. Nella espressione, per esempio, $p^2-q^2-2p+2q(p-1)i$ non è immediatamente riconoscibile la forma c^2-2c ch' essa può prendere. Le espressioni $p-qi$, $p^2+2pq-q^2$, $p^2+2q^2+(p^2-q^2)i$ si riconosceranno non riducibili alla forma $\varphi\,(c)$.

di una espressione $f(P, Q)$, di cui si possano ottenere le derivate parziali colle ordinarie regole della derivazione (derivate parziali i cui valori saranno dunque indipendenti dalle direzioni dei differenziali dP e dQ), la (4) potrà incontrastabilmente ritenersi come comprendente in se, quale caso in certo qual modo particolare, la

$$i\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

non altrettanto si potrà a dirittura ritenere in riguardo di una *qualsiasi* espressione $f(P, Q)$, come, ad esempio, di una serie o di un prodotto infinito qualunque. Laonde, quand'anche si scorgesse che una espressione $f(P, Q)$ dipenda esclusivamente dal valore del binomio $P+Qi$, e non dai valori dei singoli termini P e Q, non si potrebbe, col semplice appoggio di ciò che fu esposto in questo paragrafo, ritenere a dirittura che $f(x, y)$ sia *funzione* della variabile complessa $z = x + yi$, nel senso riemanniano, a meno che si sapesse in pari tempo che, mediante le regole di derivazione, si potrebbero ottenere dall' espressione $f(P, Q)$ espressioni in P e Q anche per le due derivate parziali

$$\frac{\partial f(P,Q)}{\partial P}, \quad \frac{\partial f(P,Q)}{\partial Q} \qquad (^*).$$

§. 31. Conchiudendo, noi ci atterremo alla definizione del sig. Riemann, ossia dunque riguarderemo come *funzione* di $z = x + yi$ una grandezza $w = u + vi$ allorchè vari con z in modo da soddisfare la

$$(1) \qquad i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}.$$

(*) Quindi non sembrerà, per esempio, superfluo, in riguardo specialmente di chi abbia soltanto compito un corso ordinario di calcolo differenziale e integrale, il dimostrare, come fanno i sigg. Briot e Bouquet nella loro *Theorie des fonct. d. p.* (n. 16), che una serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $x + yi$, e perciò dipendente visibilmente non dalle singole lettere x e y ma dal binomio $x + yi$, è *funzione* di $x + yi$ entro il cerchio di convergenza. E meno ancora parranno superflue le dimostrazioni contenute nei n. 73 e 121 dell' opera stessa.

Non ostante la definizione che stabiliva, anche Cauchy riconosceva a pieno la convenienza di considerare più specialmente le dipendenze regolate dalla condizione (1), le quali chiamava *funzioni monogene* (*). E pertanto il divario tra la definizione di Cauchy e quella del sig. Riemann non ebbe punto per effetto di far intraprendere teoriche che avessero in mira regioni diversamente estese dell' universo dominio delle funzioni; ma si può dire che ebbe soltanto per effetto di introdurre nella scuola di Cauchy l' uso della espressione *funzione monogena* invece del solo vocabolo *funzione* usato nella scuola del sig. Riemann.

La (1) ossia la

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial yi}$$

può dirsi esprimere specialmente che la derivata di w ottiene lo stesso valore secondo le due direzioni degli assi; giacchè per queste è $dz=dx$, $dz=dyi=idy$. Abbiamo poi già osservato alla fine del §. 25 che basta di sapere che la derivata conserva lo stesso valore per due qualunque direzioni diverse e non contrarie per essere certi che la medesima sia indipendente affatto dalla direzione. Il confronto di quella qualsia direzione, che in seguito potrà occorrere d' imaginare per dz, colle direzioni degli assi richiamerà sempre all' istante le eguaglianze

$$(2)\qquad \frac{dw}{dz}=\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{1}{i}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

La (1), come si è già dovuto vedere, equivale alle due condizioni in termini reali

$$(3)\qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Da queste due equazioni del primo ordine se ne possono dedurre due del secondo ordine, ciascuna delle quali contenga

(*) Vedi *Exercices d' An. et de Phys. math.* Tomo 4, pag. 346.

le derivate di una sola delle funzioni reali u e v. Basta derivarle sì rispetto ad x che rispetto ad y e confrontare le quattro equazioni risultanti. Si avranno così le

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \, .$$

Nessuna dunque delle funzioni u e v potrebb' essere scelta arbitrariamente, dovendo soddisfare ad una equazione alle derivate parziali del secondo ordine. Queste equazioni, determinanti già in parte le funzioni u e v, attestano in anticipazione e chiaramente che dev' esser possibile di stabilire molte proprietà precise ed importanti delle funzioni u e v, ossia delle funzioni w di una variabile complessa, senz' altro presupporre delle medesime fuorchè la definizione riemanniana.

§. **32**. Pel punto di partenza non del tutto ordinario, che con questa definizione indipendente da ogni presupposizione di espressioni analitiche vien stabilito per intraprendere una teorica delle funzioni, diventa opportuno che innanzi di procedere si rifletta se continuino tuttavia a sussistere talune proprietà che sono incessantemente sottintese negli ordinari procedimenti dell'analisi. Ora noi facciamo osservare che continuano a sussistere le seguenti proprietà.

Se w è funzione di z, e z è funzione di ψ, anche w è funzione di ψ. Ed invero sieno ψ e ψ' due valori della variabile ψ dei quali il secondo debba tendere a coincidere col primo, e sieno z e z', w e w' i valori corrispondenti delle altre due variabili. Pel supposto saranno

$$\lim \frac{z'-z}{\psi'-\psi} \quad \text{indipendente dalla direzione di } \psi'-\psi \, ,$$

$$\lim \frac{w'-w}{z'-z} \quad \text{indipendente dalla direzione di } z'-z \, ;$$

e però il prodotto

$$\lim \frac{z'-z}{\psi'-\psi} \, . \, \lim \frac{w'-w}{z'-z} = \lim \frac{w'-w}{\psi'-\psi}$$

sarà indipendente dalle due suddette direzioni; ma l' essere

$$\lim \frac{w'-w}{\psi'-\psi} \quad \text{indipendente dalla direzione di } \psi'-\psi$$

significa appunto che w è anche funzione di ψ.

Se w è funzione di z, anche z è funzione di w. Sia infatti w un valore qualunque della variabile w, e w' un' altro suo valore che debba tendere in qualsivoglia direzione al primo; e sieno z e z' i valori corrispondenti di z. Tenendo invariabile il valore w e mutando la direzione di $w'-w$ rimarrà invariabile il valore z e muterà la direzione di $z'-z$; ma, pel supposto, il rapporto

$$\frac{w'-w}{z'-z} \quad \text{e quindi anche} \quad \frac{z'-z}{w'-w} = \frac{1}{\dfrac{w'-w}{z'-z}}$$

ha un limite indipendente dalla direzione di $z'-z$; dunque il cambiamento della direzione di $w'-w$ non influisce sul limite del rapporto $\dfrac{z'-z}{w'-w}$.

Se w è funzione di z, lo è anche $\dfrac{dw}{dz}$. Infatti dalle (2) del §. precedente si deduce

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

d' onde

$$i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dw}{dz}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dw}{dz}\right),$$

la quale esprime che la derivata soddisfa pure alla condizione (1) del §. precedente.

CAPITOLO QUINTO

Interpretazioni geometriche della condizione inchiusa nel concetto di funzione d' una variabile affatto libera. Investigazioni geometriche relative ad alcune funzioni particolari.

---

§. 33. Una prima interpretazione geometrica della condizione (1) §. 31 ossia delle equazioni

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

si ottiene considerando la rappresentazione della funzione $w=u+vi$ fornita dal sistema delle due superficie le cui ordinate verticali siano $u(x,y)$ e $v(x,y)$.

Riguardate separatamente, queste superficie rappresentano le funzioni reali u e v delle due variabili reali x e y. Ma, diversamente da ciò che nel §. 22 si è detto circa l' arbitrarietà ammissibile per superficie rappresentative di funzioni di due variabili reali, nessuna delle superficie u e v potrebbe imaginarsi presa arbitrariamente al disopra d' una porzione qualsia del piano orizzontale, dovendo esse appartenere al genere di superficie caratterizzate dall' equazione

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0\,.$$

Così pure, mentre nel §. 25 asserimmo che l' essere una funzione di due variabili reali continua e finita sopra una porzione del piano non trae seco che quivi debba pure essere continua e finita la derivata, ed a conferma invocammo la rappresentazione geometrica; cotale asserzione non può più anticipatamente sostenersi per funzioni come le u e v che deb-

bono essere le componenti reali di una funzione d' una variabile complessa, non essendo più lecito di presupporre senza alcun' esame che per superficie, quali sono le u e v, di una natura già in parte obbligata, le tangenti a linee in esse tracciate od i piani tangenti possano cambiare di direzione bruscamente dove si voglia. Però pei noti principi circa le funzioni arbitrarie ammissibili nelle soluzioni di equazioni alle derivate parziali, può ben conghietturarsi che una delle superficie della coppia u, v potrà prendersi arbitrariamente sopra una linea nel piano orizzontale, cioè che potrà supporsi passante per una linea data comunque nello spazio. Ma non fermiamoci più oltre in simili riflessioni che toccano propriamente a ciò che forma appunto l' oggetto della parte generale dello studio a cui c' incamminiamo.

La interpretazione geometrica, oggetto di questo §, consiste nell' osservare (*), che le equazioni (1) esprimono, che, facendo rotare d' un angolo retto la superficie u intorno ad una verticale qualunque e nel senso positivo degli angoli, il piano tangente questa superficie nel punto situato in questa verticale diventa parallelo al piano tangente la superficie v nel punto corrispondente cioè pure situato in questa verticale. Ed invero, le normali alle due superficie u e v fanno coi tre assi delle coordinate angoli di cui i coseni sono rispettivamente proporzionali a

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, -1. \tag{2}$$

Ora, se gli assi rotassero insieme colla superficie u dell' indicato angolo retto, la direzione positiva dell' asse delle x diverrebbe la positiva dell' asse delle y, e questa la negativa dell' asse delle x; dunque per effetto della rotazione, la normale

(*) Briot e Bouquet, *Théorie* ecc., pag. 8.

alla superficie u farà cogli assi angoli dei quali i coseni saranno rispettivamente proporzionali alle quantità

$$-\frac{\partial u}{\partial y}\,,\ \frac{\partial u}{\partial x}\,,\ -1$$

ossia, per la (1), proporzionali alle quantità (2); essa normale sarà dunque divenuta parallela alla normale alla superficie v.

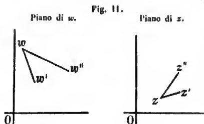
Si osservi altresì che le due superficie u e v non sono convesse in veruna loro parte; poichè le loro indicatrici ai punti corrispondenti si projettano sul piano orizzontale secondo iperbole equilatere eguali, di cui ciascuna ha per assi gli asintoti dell' altra.

§. 34. Ma vi è un' altra interpretazione geometrica, che venne presa dagli analisti in assai maggiore contemplazione, e che ha luogo quando, invece di rappresentare i valori della funzione mediante verticali erette sul piano della variabile, si rappresentino anch' essi, come quelli della variabile, mediante i punti di un piano. Imaginiamo per maggior chiarezza non un solo ma due piani: il solito piano della z ed il piano della w. Designiamo, come al solito, con le stesse lettere i valori ed i punti che li rappresentano; sì che w e z esprimano non soltanto una coppia di valori corrispondentisi della funzione e della variabile, ma anche i due punti rappresentativi e corrispondentisi, l'uno nel piano della w e l' altro nel piano della z. Ogni dipendenza di w (qualunque fosse, *funzione* o no) da z riesce rappresentata come una dipendenza della posizione del punto w da quella del punto z. Se ad ogni valore di z corrisponde un valore di w che varia con z in modo continuo e determinato, ad ogni punto del piano z corrisponderà un punto del piano w, ad ogni linea in generale una linea, ad ogni porzione tutta connessa dell' un piano una porzione tutta connessa dell' altro. La dipendenza della funzione w

dalla variabile z si presenta di tal maniera come una *imagine* del piano z sul piano w (*).

Ora, se w sia *funzione* di z, questa imagine verrà ad avere, in conseguenza della (1) §. 31, una proprietà che sarà la interpretazione geometrica di cui si tratta. Per riconoscere questa proprietà consideriamo una coppia qualunque w, z di punti corrispondentisi nei due piani, e imaginiamo che il punto z si sposti di una grandezza infinitesima $z'-z$ secondo una direzione qualunque (Fig. 11), e poscia che, ritornato dove era, si sposti di nuovo secondo altra direzione della grandezza infinitesima $z''-z$. Il punto w si sarà spostato anch'esso in prima di una grandezza infinitesima $w'-w$, e poi di altra grandezza infinitesima $w''-w$; ed il supporre che w sia funzione di z, ossia che il quoziente differenziale $\frac{dw}{dz}$ sia indipendente dalla direzione del differenziale dz, equivarrà al supporre che sia

Fig. 11.



$$\frac{w'-w}{z'-z}=\frac{w''-w}{z''-z}.$$

Ora questa eguaglianza può tradursi nelle due in termini reali:

$$\frac{\operatorname{mod}(w'-w)}{\operatorname{mod}(z'-z)}=\frac{\operatorname{mod}(w''-w)}{\operatorname{mod}(z''-z)},$$

$$\arg(w'-w)-\arg(z'-z)=\arg(w''-w)-\arg(z''-z).$$

Quest' ultima può scriversi anche come segue

$$\arg(z''-z)-\arg(z'-z)=\arg(w''-w)-\arg(w'-w)$$

(*) Di tal maniera lo studio delle dipendenze tra variabili complesse può riguardarsi come uno studio di dipendenze o trasformazioni delle figure. Intorno a ciò non daremo per adesso informazioni non necessarie per progredire nel nostro corso, ma soltanto ricorderemo la Memoria che tiene il primo posto, cioè quella di Gauss citata a pag. 72, e dalla quale appunto proviene la interpretazione geometrica che stiamo per esporre.

ed esprime che gli angoli $z'zz''$ e $w'ww''$ hanno eguale grandezza ed egual senso (*) ; e l' altra esprime che i lati infinitesimi formanti questi angoli sono tra loro proporzionali. I triangoli $zz'z''$ e $ww'w''$ sono dunque simili tra loro, e simili sarebbero del pari due poligoni o figure infinitesime qualunque corrispondentisi nei due piani. Considerando dunque una porzione finita del piano z e la sua imagine (cioè il sistema continuo dei punti corrispondenti) sul piano w, il significato geometrico dell' essere w *funzione* di z in quella porzione consiste nell' essere *simili nelle loro parti infinitesime* la detta porzione e la sua imagine sul piano w.

Questa simiglianza però ammette delle eccezioni. È affatto chiaro che la medesima non avrebbe luogo per coppie di valori particolari di z e w per le quali le variazioni tra loro corrispondenti dz e dw non stessero in rapporto finito, ossia per le quali la derivata $\frac{dw}{dz}$ riuscisse nulla o infinita. Vedremo più tardi, nella debita generalità, in quali maniere si corrispondano tra loro nei luoghi d' eccezione le parti infinitesime.

§. 35. Passiamo a considerare, per esercizio, alcune funzioni particolari. Allorquando, imaginando nel piano della variabile due sistemi di linee che a guisa di rete lo coprano per intero, si possano determinare i due sistemi di linee corrispondenti nel piano della funzione, si potranno evidentemente seguire con tutta facilità i movimenti simultanei della variabile e della funzione (**), ossia riconoscere prontamente le trasformazioni che subiscono nel piano della funzione figure qualunque tracciate nel piano della variabile. Se i due sistemi nel piano

(*) Od, in altri termini, che i lati $\overline{zz'}$ e $\overline{ww'}$ dovrebbero rotare di uno stesso angolo, ed entrambi nel senso positivo (nei rispettivi piani) oppure entrambi nel senso negativo, per prendere le direzioni dei lati $\overline{zz''}$ e $\overline{ww''}$.

(**) E perciò importa di sempre ben ricordare che, ogni qualvolta il punto mobile rappresentativo della variabile cambia bruscamente di direzione, rotando per così dire intorno a se medesimo di un' angolo finito, altrettanto deve fare anche il punto mobile che gli corrisponde nel piano della funzione, e cioè rotare esso pure intorno a se medesimo dello stesso angolo finito e *nello stesso senso*.

z fossero, per esempio, di linee tra loro ortogonali, ortogonali dovrebbero pur essere tra loro le linee dei due sistemi nel piano w.

Cominciamo dal caso semplicissimo di $w = z^2$. Se considerassimo nel piano z i due sistemi di parallele agli assi, troveremmo come corrispondenti nel piano w due sistemi di parabole che hanno i fuochi in O ed i diametri principali sopra l' asse reale. Ma, nel presente caso, vogliamo invece considerare nel piano z il sistema delle rette che partono da O ed il sistema delle circonferenze che in O hanno il centro. Per ogni retta è costante l' argomento, per ogni circonferenza è costante il modulo di z. E però, essendo

$$\arg w = 2 \arg z \quad , \quad \mathrm{mod}\, w = (\mathrm{mod}\, z)^2 ,$$

alle rette corrisponderanno nel piano w ancora rette partenti da O ed alle circonferenze ancora circonferenze aventi in O il centro. Ma siffatte rette nel piano w comprenderanno a due a due angoli doppi di quelli compresi fra le rette corrispondenti nel piano z (*), e le circonferenze avranno raggi eguali ai quadrati dei raggi corrispondenti nel piano z. Queste osservazioni bastano per far comprendere quali posizioni tengano i punti corrispondentisi ossia le intersezioni delle coppie di rette e circonferenze corrispondentisi nei due piani. Tuttavia ci fermeremo ancora un poco sul caso $w - z^2 = 0$, per fare considerazioni che, sebbene affatto ovvie, troveremo però in seguito vantaggio a non aver tralasciate.

Imaginiamo due rette R_z e R_w girevoli intorno a O, una sul piano z e l' altra sul piano w, e sieno esse pel primo istante, per fissar le idee, nelle direzioni positive dei due assi reali. Inoltre riguardiamo R_z come una punteggiata ad intervalli infinitesimi, ossia come formata da una successione di punti che,

(*) Ecco un caso d' eccezione alla eguaglianza che in generale deve sussistere fra gli angoli corrispondenti. Intorno ai due punti O, che si corrispondono nei due piani, due figure infinitesime non sono simili tra loro; ivi le variazioni dw e dz non stanno in rapporto finito tra loro, essendo $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2z} = \infty$.

quantunque in sostanza punti di Ox, vogliamo concepire come distinti e per così dire sorretti da quest'asse e precisamente dai punti di esso asse che rappresentano i numeri

$$0\,,\ \varepsilon\,,\ 2\varepsilon\,,\ 3\varepsilon\,,\ 4\varepsilon\,,\ \text{ecc.}\qquad(\varepsilon \text{ inf. piccolo});$$

e riguardiamo similmente R_w come formata dalla successione di punti sorretti dai rappresentativi dei numeri corrispondenti

$$0\,,\ \varepsilon^2,\ 2^2\varepsilon^2,\ 3^2\varepsilon^2,\ 4^2\varepsilon^2,\ \text{ecc.}$$

Quando R_z prenderà a rotare intorno a 0 (e per fissar le idee imaginiamo che roti nel senso positivo), affinchè i punti formanti R_w coprano in ogni istante i corrispondenti di quelli coperti da R_z, bisognerà che R_w roti con velocità doppia di quella di R_z. Per tal modo, quando R_z avrà fatto un' intero giro, cioè descritto un' intero piano o strato sovrapposto al piano z, R_w avrà fatto due interi giri, cioè descritto due interi piani o strati sovrapposti al piano w. Ossia, entrando in maggiori particolari, se consideriamo, come già i punti delle due rette mobili, così anche le direzioni, che rotando esse vanno prendendo, come distinguibili l' una dalla successiva e date dalle due serie di valori angolari corrispondentisi

$$0\,,\ \eta\,,\ 2\eta\,,\ 3\eta\,,\ \text{ecc.}\qquad(\eta \text{ inf. piccolo}),$$
$$0\,,\ 2\eta\,,\ 4\eta\,,\ 6\eta\,,\ \text{ecc.}\qquad ;$$

e se imaginiamo che ognuna di coteste direzioni si renda in certo qual modo sensibile mediante un filo (rettilineo indefinito) e che si rendano pure sensibili mediante fili (circolari) i cammini dei singoli punti delle rette mobili, laonde le posizioni tutte dei punti resteranno significate dai crocicchi dei fili (i quali crocicchi sarà poi meglio riguardare come nodi): riconosceremo affatto chiaramente che nel proprio giro R_z avrà generato uno strato retiforme disteso sul piano z, e che nel tempo stesso R_w avrà generato due strati retiformi distesi sul piano w, dei quali il primo corrispondente al primo mezzo strato sul piano z ed il secondo (che, per fissar le idee, riterremo come sovrapposto al primo) corrispondente al secondo

mezzo strato sul piano z. Inoltre, ritrovandosi R_z e R_w alla fine dei rispettivi giri semplice e doppio nelle direzioni iniziali, possiamo senza imbarazzo imaginare che il termine di ciascun filo circolare della rete distesa sul piano z si connetta col rispettivo cominciamento, onde questa rete risulti tutta connessa, e che del pari il termine di ciascun filo bicircolare della rete a doppio strato distesa sul piano w, traversando lo strato sottoposto, si connetta col rispettivo cominciamento, rendendo così pure tutta connessa quest' altra rete.

Abbiamo così due reti a vani infinitesimi ossia due superficie, ciascuna delle quali senza contorno di sorta perchè estendentesi indefinitamente e dappertutto connessa, coprenti l' una una sola volta il piano z e l' altra due volte il piano w, e tali che ad un punto dell' una corrisponde sempre uno ed un solo punto dell' altra. Due punti sovrapposti nella rete w corrispondono a due nella rete z simmetricamente posti rispetto al punto 0, il che ricorda che w ha lo stesso valore per due valori di z tra loro contrari. La rete o tessuto w può dirsi la deformazione della rete z prescritta dalla funzione $w = z^2$, come la rete z potrebbe dirsi la deformazione della rete w prescritta dalla funzione $z = w^{\frac{1}{2}}$ della variabile indipendente w.

Concependo i fili (cioè tutti i loro tratti infinitesimi compresi tra nodo e nodo) come flessibili ed estendibili, non v' è difficoltà a imaginare che queste reti, levate, se piace, dai due piani orizzontali, vengano deformate in infinite guise senza lesione della connessione in alcun punto. Le possibili deformazioni, che lasciano pur sempre intatta la connessione, si offriranno in ancora maggiore varietà e più facilmente, ammettendo che i fili e quindi anche pezzi di esse reti possano oltrepassarsi l' un l' altro senza rompersi (*) ed eziandio che durante

(*) Per lo scopo rappresentativo pel quale coteste reti o superficie sono qui imaginate, la connessione deve puramente intendersi come rappresentazione di continuità nelle variazioni dei valori o numeri rappresentati dai singoli punti. Come rappresentazioni puramente ideali di passaggi continui, i fili possono quindi benissimo supporsi sciolti da proprietà che pur soglionsi riconoscere in fili materiali.

una deformazione si possa operare momentaneamente nella rete qualche taglio, cioè togliere in qualche dove la connessione, purchè la si ristabilisca ancora dappertutto prima che la deformazione sia da riguardarsi come compiuta.

Pei detti concepimenti le due reti z e w si potranno considerare come deformazione o trasformazione l'una dell'altra, od entrambe come trasformazioni di una stessa terza rete che potrà prendersi sotto una infinita varietà di forme. Per ottenere la rete w come trasformazione della rete z basterà effettuare ciò ch'è suggerito dalla già dichiarata corrispondenza tra i fili dell'una e quelli dell'altra.

Suppongasi in prima di voler trasformare nella corrispondente porzione di rete w il solo primo quadrante della rete z, cioè dire la parte che corrisponde ai valori simultaneamente positivi di x e y, e per fissare di più le idee s'imagini, se vuolsi, essa rete, non come illimitata, ma come un cerchio finito col centro O. La trasformazione si potrà concepire effettuata mediante le due seguenti operazioni. Si spieghi il quadrante, come fosse un ventaglio, secondo il senso positivo degli angoli, di tanto che ogni suo raggio o filo rettilineo venga a formare col filo corrispondente alla direzione positiva dell'asse reale, e che supponesi tenuto fisso, un'angolo doppio di quel che formava primieramente. Per questa operazione i tratti infinitesimi da nodo a nodo nei fili circolari avranno dovuto assumere lunghezze rispettivamente doppie di quella di prima; poichè ogni filo circolare dall'essere un quarto ha dovuto diventare una metà della circonferenza d'egual raggio. In secondo luogo, si spostino i fili circolari in guisa che, rimanendo pur sempre mezze circonferenze col centro in O, vengano ad avere raggi i quali sieno in lunghezza i quadrati dei raggi di prima. Per questa operazione avranno dovuto variare di lunghezza simultaneamenti i tratti infinitesimi dei fili circolari e dei rettilinei.

Per trasformare, non il solo primo quadrante, ma i primi due quadranti della rete z, non si hanno se non da fare ancora

le suddette due operazioni. Il mezzo cerchio della rete z riuscirà trasformato nel primo cerchio o strato inferiore della rete w.

Per trasformare finalmente tutto il cerchio o tessuto z, converrà anzitutto imaginare operato per un momento un taglio in esso tessuto dal centro sino alla periferia, e poscia fare le due già dette operazioni, ed infine ristabilire la connessione fra i due orli del taglio. Sebbene cosa ovvia come le precedenti, entriamo tuttavia a suo riguardo in qualche più minuto particolare. Concepito il taglio come, per fissar le idee, sta espresso nella fig. 12, e tenuto fermo l'orlo $\overline{0a}$, faremo rotare (Fig. 13) l'orlo $\overline{0a'}$

Fig. 12

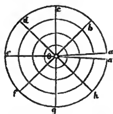
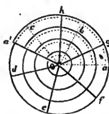


Fig. 13.



e con esso tutti i raggi precedenti $\overline{0h}, \overline{0g}, \ldots, \overline{0c}, \overline{0b}$ proporzionalmente agli angoli che fanno coll'orlo $\overline{0a}$ (*). Con ciò verremo a costituire un secondo strato, il quale riuscirà infino intero come il sottoposto, poichè $\overline{0a'}$ deve rotare di quattro retti ossia portarsi nuovamente nella direzione di $\overline{0a}$. Ciò ottenuto, sposteremo i fili bicircolari in modo che i raggi divengano i quadrati di ciò che erano prima. Infine ristabiliremo la connessione tra l'orlo $\overline{0a'}$ e l'orlo $\overline{0a}$, o, ciò ch'è

(*) Angoli, già s'intende, misurati a partire da $\overline{0a}$ nel senso positivo.

Colla fig. 13 intendiamo rappresentare lo stato della rete allorchè $\overline{0a'}$ abbia fatto quasi mezzo giro. Le linee punteggiate esprimono fili della porzione di rete che rimane coperta dallo strato superiore cui la rotazione va producendo. Gli archi continui esprimenti fili circolari di questo strato furono tracciati con raggi un poco ingranditi a fine di lasciar vedere gli archi punteggiati.

dire lo stesso, fra il termine di ciascun filo bicircolare e il rispettivo cominciamento. Ed ecco così evidentemente trasformata la rete z dalla sua forma primitiva in quella della rete w, restando dappertutto inalterata la connessione. Si potrebbe osservare che, se il raggio $\overline{Oa}$ non corrispondesse alla direzione positiva dell' asse reale, i due strati non s' incrocicchierebbero precisamente lungo cotesta direzione, come nel caso della rete w che vedemmo descritta dalla retta girevole R_w. Ma la direzione e, più in generale, anche la natura geometrica della linea d' incrocicchiamento può riguardarsi come affatto indifferente; ed il caso, per esempio, di $\overline{Oa}$ rettilinea ma non diretta secondo l'asse reale si riduce a completa coincidenza con quello dianzi considerato, imaginando che il settore circolare dello strato superiore compreso fra $\overline{Oa}$ ed il raggio corrispondente alla parte positiva dell' asse reale cali al disotto dello strato inferiore; il che, come s' è detto, noi imaginiamo che possa avvenire senza rotture ossia violamento di connessione in veruna parte di cotesti strati retiformi.

Finalmente vogliamo pure premettere che, invece di prendere in considerazione *due* luoghi rappresentativi o reti, una per la variabile, l' altra per la funzione, riuscirà per lo più in seguito preferibile di considerarne una sola, la quale del resto potrà imaginarsi trasformata ora in una ora in altra forma. Contempliamo, per esempio, la sola rete z distesa nella sua forma originaria sul piano z. Essa potrà benissimo riguardarsi come luogo dei punti determinativi, non dei valori della sola z, ma di questi valori accoppiati coi corrispondenti della w. Poichè, se il punto *rappresenta*, per così dire, *perfettamente* un valor di z (rappresentandone la effettiva grandezza mercè la posizione che tiene rispetto ai punti dove z ha i valori $0, 1, i$), esso *individua* non meno *perfettamente* il corrispondente valore di w, in quanto che a cotesto punto si sa che corrisponde uno ed un solo punto della rete w. Potremo dunque renderci affatto indipendenti dal pensiero di quest'ultima rete e scorgere

tutto il bisognevole nell' unica rete z, imaginando che ciascuna coppia di valori di z e w venga fissata o deposta inrimovibilmente nel relativo punto della rete z, quasi che e il punto e i numeri fossero dotati d'estensione e come enti materiali legati tra di loro. Dopo di ciò, se occorra, si potrà altresì liberamente imaginare che la rete venga staccata dal piano z e deformata in infinite guise; che, se non venga lesa in nessun punto la connessione, essa rimarrà sempre *rete atta a rappresentare la dipendenza* $w-z^2=0$, cioè rete dotata delle proprietà: che *ogni coppia distinta* di valori delle variabili z e w ossia *ogni soluzione distinta* dell' equazione $w-z^2=0$ ha in essa *uno ed un solo* punto rappresentativo, e che *qualunque simultanea variazione continua* di dette variabili si può raffigurare in *un movimento continuo* di un punto mobile in essa; e viceversa. Entrambe le variabili possono dirsi funzioni affatto determinate (cioè che ammettono un solo valore) del punto o posto in cotesta rete o superficie rappresentativa; mentre, fatta astrazione da ogni rappresentazione, la z è funzione a due valori rispetto a w come variabile indipendente.

In seguito vedremo che la superficie rappresentativa della dipendenza fra due variabili s'imagina per lo più distesa sul piano di quella che si vuol considerare come variabile indipendente, e sempre, ben' inteso, in modo che tutti i punti dove per questa variabile trovasi deposto uno stesso valore riescano precisamente situati sopra il punto rappresentativo del medesimo valore nel detto piano. Se la funzione avrà n valori per ogni valore della variabile, come nel caso della radice di una equazione algebrica del grado n i cui coefficienti fossero funzioni razionali della variabile, la rete distesa sul piano di questa riuscirà formata di n strati.

§. 36. Consideriamo la relazione $w=z^n$, essendo n intero positivo. Sarà

$$\arg w = n \arg z \quad , \quad \mathrm{mod}\, w = (\mathrm{mod}\, z)^n .$$

Imaginando qui pure le due rette girevoli R_z e R_w, la seconda

dovrà rotare con velocità *n*upla in confronto della prima, e perciò, mentre R_z genererà uno strato, R_w ne genererà *n*. Ritenuto parimenti che i termini dei fili circolari della rete *z* connettansi coi rispettivi cominciamenti, e che lo stesso avvenga dei termini dei fili *n*circolari della rete *w* (i quali dallo strato superiore passeranno ai rispettivi cominciamenti nello strato inferiore traversando $n-1$ strati intermedi), si avranno due reti per le quali potrebbersi ripetere le varie considerazioni fatte nel §. precedente. La rete *w* (specialmente se si riduca ogni strato ad un cerchio finito) potrebbe qualificarsi come superficie di una vite, con asse eretto perpendicolarmente in 0 sul piano *M*, e con passo infinitesimo. Ma non è da dimenticare che nel caso nostro vuolsi concepire che lo strato superiore della superficie si continui, traversando i sottoposti, nello strato inferiore. Riguardando *z* come funzione di *w*, si è in un caso particolare di radice d' una equazione algebrica del grado *n* a coefficienti razionali rispetto alla variabile; alla rappresentazione e allo studio della funzione riuscirebbe specialmente opportuna (se la semplicità del caso non la rendesse superflua) la rete a *n* strati distesa sul piano *w*, in ogni punto della quale si pensi deposto il corrispondente valore di *z*. Questa funzione, che è a *n* valori rispetto alla variabile *w* o rispetto al punto mobile nel piano semplice *w*, riesce ad un solo valore ossia affatto determinata rispetto al posto nella rete o superficie a *n* strati suddetta.

§. **37**. Consideriamo la $w=e^z$. Come dichiarammo nel §. 15, intendiamo con e^z la somma della serie

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1.2}+\ldots,$$

ed è superfluo il far riflettere ch' essa soddisfa la condizione per essere *funzione* di *z*. Essendo

$$e^{z+2\pi i}=e^z$$

la funzione ammette il periodo $2\pi i$, ossia prende uno stesso valore in tutti i punti del piano *z* succedentisi parallelamente

all' asse imaginario alla distanza 2π l' uno dall' altro. Perciò, dividendo il piano z in liste mediante rette parallele all' asse reale (*) e distanti 2π l' una dall' altra, la funzione w prenderà già tutti i valori di cui è suscettibile, ossia il punto w percorrerà già tutta l' estensione per esso possibile nel piano w, anche soltanto facendo muovere z entro una di siffatte liste.

Restringiamoci dunque a considerare una sola lista, e sia quella determinata dall' asse reale e dalla parallela dalla banda delle y positive. Riflettendo che, per ottenere tutti i punti della lista, alla x devonsi dare tutti quanti i valori reali; che ogni valore di x va combinato, una sola volta, con tutti e soli i valori di y da 0 a 2π; e che si ha

$$\operatorname{mod} w = e^x \quad , \quad \arg w = y + 2\pi i . m : \qquad (^{**})$$

si riconosce che alla lista del piano z corrisponde tutto intero il piano w, ed in modo che ad un punto di quella corrisponde un solo punto di questo, e viceversa.

Ma per scorgere più chiaramente tutt' assieme l' imagine della lista z sul piano w, fissiamo specialmente nella lista i due sistemi di rette parallele ai due assi. Alle parallele a $0y$, lungo ciascuna delle quali è costante la x e perciò anche il modulo di w mentre la y ossia l' argomento di w cresce da 0 a 2π, corrispondono nel piano w intere circonferenze aventi il centro in 0. Alle rette parallele a $0x$ corrispondono invece altrettante rette che partono da 0. Nella fig. 14 veggonsi le quattro parallele a $0y$ per le quali x ha ordinatamente i valori, $-1, 0, 1, 2$. La prima vedesi punteggiata; i termini delle altre tre, a tratto continuo, veggonsi designati colle lettere a, a'; b, b'; c, c'. Nella fig. 15 veggonsi le quattro circonferenze corrispondenti: la prima è punteggiata; le altre sono quelle

(*) Invece di questo sistema di rette parallele se ne potrebbe prendere un' altro in qualunque altra direzione, od anche un sistema di linee curve quali otterrebbersi facendo scorrere un' unica linea replicatamente in modo che ciascuna volta il cammino d' ogni suo punto sia in grandezza e direzione $2\pi i$.

(**) Il numero intero arbitrario m non influisce, come è chiaro, sulla posizione del punto nel piano w.

che partono dai punti α, β, γ corrispondenti degli a, b, c ed arrivano ad α', β', γ' corrispondenti degli a', b', c'. Veramente i punti $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ dovrebbero confondersi coi punti $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Ciò non ostante abbiamo rappresentate queste due serie di punti come formanti due rette distinte, a fine di rendere, per così dire, più visibile la trasformazione che i due sistemi di rette o fili della lista z subiscono nella imagine sul piano w. Questa trasformazione può riguardarsi come composta delle due più semplici seguenti, analogamente a quanto s' è già osservato nei due precedenti paragrafi. L' una consiste nel portare ciascuna parallela a Oy, compresa la $\overline{aa'}$ giacente sulla Oy stessa, ad avere la distanza e^x invece di x dal detto asse imaginario. Con ciò tutte le parallele ossia fili determinati da valori negativi di x riusciranno siffattamente avvicinati tra loro che tutta la metà di lista, la quale da Oy stendevasi all' infinito nel senso negativo dell' asse reale, si troverà ristretta tra fili $\overline{nn'}$ e $\overline{aa'}$ (Fig. 16) distanti l' uno dal-

Fig. 15.

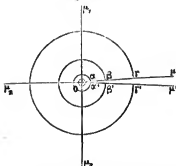


Fig. 14.

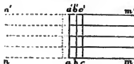


Fig. 16.



l' altro di una sola unità. L' altra consiste nell' imaginare che i tratti infinitesimi dei fili spostati si modifichino in lunghezza nel rapporto di 1 alla distanza che ciascuno ottenne da nn', e si incurvino per modo che i fili stessi riescano trasformati in intere circonferenze concentriche, i cui raggi perciò saranno rispettivamente eguali alle distanze ora nominate. Con ciò il

filo $\overline{nn'}$ sarà ridotto a circonferenza di raggio nullo cioè ad un punto (il punto 0 del piano w); ed i fili già paralleli a $0x$, senza cessare di essere rettilinei, partiranno tutti come raggi dal detto punto, facendo col filo disposto secondo l'asse reale angoli rispettivamente eguali alle loro primitive distanze dall'asse stesso.

Volendo ora considerare non gia una lista ma tutto intero il piano z, è chiaro, che ad ogni suo punto corrisponde bensì ancora un solo punto del piano w, ma che, pel contrario, ad un punto nel piano w non corrisponde un solo bensi una infinità di punti nel piano z, e cioè il punto che appartiene alla lista dianzi considerata e tutti gli omologhi delle altre liste. Volendo concepire tal luogo geometrico per la variabile w che ad ogni punto di esso corrisponda anche un solo punto del piano z, basterà considerare invece del piano o superficie a strato unico una superficie composta d'una infinità di strati distesi sul piano w, ciascuno dei quali corrisponda ad una lista del piano z. Imaginiamo che, sul piano z, una retta indefinita R_z disposta inizialmente sull'asse reale si stacchi da quest'asse e conservandosi ad esso parallela proceda nel senso delle y positive. Come sua corrispondente, R_w, sul piano w consideriamo inizialmente la $\overline{0\alpha\beta\gamma\mu}$. Questa prenderà a rotare nel senso positivo degli angoli, e, mentre R_z genererà la lista che avevamo preso in speciale considerazione, essa farà un giro intero, passando per $\overline{0\mu_1}$, $\overline{0\mu_2}$, $\overline{0\mu_3}$ e disponendosi infine secondo $\overline{0\mu'}$, ed avrà così generato uno strato coprente completamente il piano w. Continuando a progredire, la R_z genererà una seconda lista, e la R_w, continuando a rotare, genererà un secondo strato che potremo riguardare come sovrapposto al primo. E così seguitando, mentre R_z genererà la infinità di liste costituenti la parte di piano dove le y sono positive, R_w genererà una infinità di strati completi ciascun dei quali corrispondente ad una lista determinata, e che potremo riguardare come succedentisi sempre ciascuno al disopra del precedente.

Imaginando poi che R_z, rimettendosi sull'asse reale, prenda a discostarsene nella direzione delle y negative, onde generare le liste di quest' altra parte di piano z, la R_w, dalla direzione primitiva $\overline{O\mu}$, prenderà a rotare nel senso negativo degli angoli e genererà ancora una infinità di strati che potremo riguardare come succedentisi ciascuno al disotto del precedente. Il sistema di tutti gli strati generati da R_w costituisce un luogo geometrico tutto connesso, il quale, intorno alla verticale eretta sul punto O del piano w, potrebbe riguardarsi, similmente al già esposto nel §. precedente, come la superficie di una vite con l' asse in questa verticale e con passo infinitesimo.

Se, considerando w come variabile indipendente, e come luogo del punto w non già la superficie a strati ora descritta ma il semplice piano w, vorremo tuttavia ancora ottenere che, ogniqualvolta w ritorni in uno stesso punto, la funzione z cioè lw riprenda sempre lo stesso valore ossia ritorni sempre anch' essa nello stesso punto del proprio piano: imporremo alla varietà dei cammini leciti per w la restrizione di non mai comprendere nemmeno *un* giro completo e *veramente chiuso* intorno al punto O; ossia, per maggiore chiarezza, imagineremo il piano w tagliato lungo una linea che da O vada all' infinito (per esempio, lungo tutta la parte positiva dell' asse reale, come è già indicato nella fig. 15) e riterremo che, nel muoversi, w non debba mai distaccarsi dalla superficie così tagliata, cioè non mai sorpassare il taglio (*). Inoltre ammetteremo che, scelto, per un dato valore iniziale di w, *uno* fra gl' innumerevoli valori corrispondenti di z, i successivi valori di z debbano essere quelli che, variando w in modo continuo, succedono con continuità al già scelto. Si scorge subito che, con siffatte

(*) Se la superficie si deformasse un poco in guisa che i due orli del taglio riuscissero divergenti, w non potrebbe sorpassare il taglio senza distaccarsi dalla superficie durante il salto che farebbe dall' uno all' altro orlo.

restrizioni, facendo percorrere a w tutto il piano tagliato, la z percorrerà tutta e sola una lista del proprio piano, quella lista in cui giace il punto-valore prescelto come corrispondente al valor iniziale di w.

§. 38. Consideriamo la $w = \operatorname{sen} z$. Anzitutto osserveremo che intendiamo stabilito il significato delle funzioni circolari per qualsia valore complesso della variabile mediante le formole euleriane

$$(1)\qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\ ,\quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\ ,$$

dalle quali discende tosto, come è noto, la sussistenza delle formole o proprietà fondamentali delle funzioni circolari per *qualunque* valore di z.

Essendo $\operatorname{sen}(z + 2\pi) = \operatorname{sen} z$, la funzione ammette il periodo 2π, ossia prende uno stesso valore in tutti i punti del piano z succedentisi parallelamente all' asse reale alla distanza 2π l' uno dall' altro. Perciò, dividendo il piano z in liste mediante rette parallele all' asse imaginario e distanti 2π tra loro, la funzione prenderà già tutti i valori di cui è suscettibile (e si vedrà che sono tutti quanti i numeri) anche soltanto facendo variare z entro una di siffatte liste.

Di più, essendo $\operatorname{sen}(\pi - z) = \operatorname{sen} z$, ossia

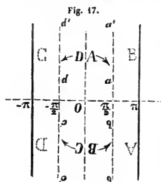
$$\operatorname{sen}\left([2n+1]\frac{\pi}{2} + z\right) = \operatorname{sen}\left([2n+1]\frac{\pi}{2} - z\right),$$

in ogni due punti simmetricamente disposti rispetto ad uno qualunque di quelli espressi da $z = [2n+1]\frac{\pi}{2}$ la funzione prende uno stesso valore; laonde entro ciascuna lista ogni valore di cui essa è suscettibile compare in due punti.

Consideriamo, per fissar le idee, la lista racchiusa fra le parallele a Oy che ne distano di π, l' una dalla banda delle x

positive, l'altra dalla opposta (Fig. 17). Essendo $z=\frac{\pi}{2}$ e $z=-\frac{\pi}{2}$ i punti di essa rispetto ai quali sono simmetricamente disposti quelli che portano uno stesso valore della funzione, se si tirano le parallele a Oy passanti per $z=\frac{\pi}{2}$, $z=-\frac{\pi}{2}$, queste parallele insieme cogli assi dividono la lista in otto parti o liste minori, le quali a due a due (segnate nella figura con lettere eguali) portano lo stesso sistema di valori della funzione.

Fig. 17.



Imaginiamo ora nel piano z, o semplicemente nella lista testè considerata, i due sistemi di tutte le parallele ai due assi e cerchiamo quali siano i sistemi di linee corrispondenti nel piano w. Dalla prima delle (1), ponendovi $x+yi$ in luogo di z e $\cos x \pm i \operatorname{sen} x$ in luogo di $e^{\pm ix}$, si ha

$$w = \operatorname{sen} x \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} + \cos x \frac{e^{-y}-e^{y}}{2i}$$

e quindi

$$u = \operatorname{sen} x \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}, \quad v = \cos x \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}.$$

La eliminazione di x fra queste due equazioni darà l'equazione generale delle linee corrispondenti alle parallele a Ox, la eliminazione di y l'equazione delle corrispondenti alle parallele a Oy.

Eliminando x si ottiene

$$\frac{u^2}{\left[\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right]^2} + \frac{v^2}{\left[\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right]^2} = 1,$$

la qual' equazione rappresenta un sistema di ellissi aventi i

fuochi nei punti $w=1$ e $w=-1$, che sono i corrispondenti dei punti $z=\frac{\pi}{2}$ e $z=-\frac{\pi}{2}$.

Eliminando y si ottiene

$$\frac{u^2}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{v^2}{\cos^2 x}=1 ,$$

la qual' equazione rappresenta un sistema di iperbole aventi pure i fuochi nei punti 1 e -1 (*).

(*) Questi sistemi di linee mostrano facilmente come sia la imagine di qualsivoglia porzione del piano z sul piano w, e quindi come si possa concepire che una rete distesa sulla lista z e formata da fili disposti secondo le rette parallele agli assi, deformandosi per gradi insensibili, riesca distendibile sul piano w coi fili stessi disposti secondo le coniche corrispondenti alle rette, e colla stessa connessione di prima. Per cotesta trasformazione gioverebbe l' imaginare per un momento operati in prima due tagli nella rete secondo l' asse reale, l' uno da $\frac{\pi}{2}$ a π, l' altro da $-\frac{\pi}{2}$ a $-\pi$; fra gli orli dei quali ristabilirebbesi la connessione dopo la deformazione. Ed invero, ciò supposto, s' imagini che le parallele all' asse imaginario costituenti le quattro parti A, B, C, D prendano rispettivamente la forma delle iperbole che ad esse corrispondono nel piano w. La iperbola corrispondente alle parallele estreme $a'b'$, $d'c'$ confondesi colle due porzioni d' asse reale che da 1 nella direzione positiva e da -1 nella negativa vanno all' infinito. Perciò le due parti aa' e bb' dovranno rotare di un' angolo retto intorno al loro punto di congiunzione sull' asse reale (nel senso per ciascuna indicato dalle frecce) mentre il punto stesso dovrà avvicinarsi al punto 0 tanto da averne la distanza 1. Analogamente dovranno comportarsi le cc' e dd'. Per tal modo ciascuna delle parti A, B, C, D coprirà interamente un quarto di piano, e tutte assieme costituiranno uno dei due strati completi, coi quali poi coprire il piano w. E ciascuna delle altre quattro parti, rimaste inalterate e connesse alle prime lungo aa', bb', cc', dd', si troverà già sospinta dalla rotazione di queste rette nel quarto di piano riuscito testè tutto coperto dalla sua omonima fra le A, B, C, D. Ricordando la supposta traversabilità dei fili, potremo concepire che quelle quattro parti riescano tutte sottoposte alle A, B, C, D, sì che s' incrocicchino con queste lungo l' asse reale cioè lungo la trasformata posizione delle aa' e bb' da una banda e delle cc' e dd' dall' altra. Dopo di ciò avremo da imaginare che ciascuna di dette parti sottoposte, mediante deformazione di fili analoga alla già descritta, si espanda in senso opposto del precedente per la omonima porzione, venendo a costituire del pari un quarto di piano, e quindi tutte quattro insieme uno strato completo; e che si ristabilisca in questo strato la connessione tra le due parti di ciascuno dei fili divenuti iperbolici, le quali furono disgiunte in forza dei due tagli imaginati prima della deformazione. Ecco così trasformata la rete z in forma adatta per essere distesa nel modo desiderato sul piano w.

§. 39. Consideriamo la funzione $w = sn\, z$ (*). Questa è doppiamente periodica. Imaginando il piano z diviso mediante due sistemi di rette parallele in parallelogrammi tutti eguali, i cui lati rappresentino in grandezza e direzione i due periodi ϖ e ϖ' della funzione (**), questa prende già tutti i valori di cui è suscettibile (e si vedrà che sono, come già per le altre funzioni considerate, tutti quanti i numeri) anche in un solo qualunque di siffatti parallelogrammi.

Di più, essendo $sn\left(\frac{\varpi}{2} - z\right) = sn\, z$, ossia

$$sn\left([2n+1]\frac{\varpi}{4} + n'\frac{\varpi'}{2} + z\right) = sn\left([2n+1]\frac{\varpi}{4} + n'\frac{\varpi}{2} - z\right),$$

in ogni due punti simmetricamente disposti rispetto ad uno qualunque di quelli espressi da $z = [2n+1]\frac{\varpi}{4} + n'\frac{\varpi'}{2}$ la funzione prende uno stesso valore; laonde entro ciascun parallelogrammo ogni valore di cui essa è suscettibile compare in due punti.

Consideriamo il parallelogrammo avente il centro in 0. Essendo $z = \frac{\varpi}{4}$ e $z = -\frac{\varpi}{4}$ i punti entro di esso rispetto ai quali sono simmetricamente disposti quelli che portano uno stesso valore della funzione, se si tirano per questi due punti le parallele ai lati, queste parallele, insieme colla bisettrice dei lati eguali al periodo ϖ, dividono il parallelogrammo in otto parti parallelogrammiche le quali a due a due (segnate nella figura 18 con lettere eguali) portano lo stesso sistema di valori della funzione.

(*) Noi ammettiamo qui come note le definizioni ed alcune proprietà delle funzioni ellittiche (Vedi le *Notizie*) al solo scopo di trattare anche per $sn\, z$ la questione geometrica dei paragrafi precedenti. Chi crede può tralasciare questo paragrafo.

(**) Analogamente al già osservato nel caso d'un solo periodo, qui pure potrebbersi imaginare altri sistemi di linee rette od anche curve, se vogliasi puramente che il piano risulti diviso in parallelogrammi (rettilinei o curvilinei) le cui dimensioni nelle direzioni dei periodi abbiano a misura i moduli dei periodi stessi.

Noi ci mettiamo a dirittura nel caso ordinario, in cui cioè uno dei periodi è reale e l'altro imaginario, ossia in cui, impiegando le solite lettere jacobiane, ϖ è la quantità reale $4K$ e ϖ' è $2iK'$. La fig. 18 è appunto tracciata in questa supposizione.

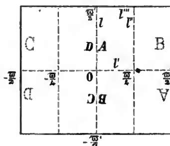


Fig. 18.

Ciò premesso, imaginiamo nel piano z, o semplicemente nel parallelogrammo, i due sistemi di tutte le parallele ai lati, ossia agli assi reale e imaginario, e cerchiamo i sistemi di linee corrispondenti nel piano w. Dalla

$$u + vi = sn(x + yi),$$

in virtù della formola d'addizione e di quelle di trasformazione delle funzioni ellittiche di variabile imaginaria yi e modulo k in funzioni ellittiche della variabile reale y e modulo $k' = \sqrt{1 - k^2}$, si ottiene la

$$u + vi = \frac{sn\, x\, dn(y,k') + i\, cn\, x\, dn\, x\, sn(y,k')\, cn(y,k')}{cn^2(y,k') + k^2 sn^2 x\, sn^2(y,k')},$$

in cui il modulo, dove non è indicato, s'intende essere k. Dunque, ponendo per brevità

$$sn\, x = s \quad , \quad cn\, x = c \quad , \quad dn\, x = d$$
$$sn(y,k') = \sigma \quad , \quad cn(y,k') = \gamma \quad , \quad dn(y,k') = \delta \ ,$$

si avrà

$$(1) \qquad u = \frac{s\delta}{\gamma^2 + k^2 s^2 \sigma^2} \quad , \quad v = \frac{c\, d\, \sigma\, \gamma}{\gamma^2 + k^2 s^2 \sigma^2}.$$

Per trovare le linee corrispondenti alle parallele a $0x$ abbiamo da eliminare x fra queste equazioni. Poichè x entra soltanto in s, c, d, possiamo eliminare queste tre quantità fra le dette equazioni e le

$$c^2 + s^2 = 1 \quad , \quad d^2 + k^2 s^2 = 1.$$

Cavando da queste due c e d e facendone la sostituzione nella

$$v = \frac{c\,d\,\sigma\,\gamma\,u}{s\,\partial}$$

si ha

$$\sigma^2\gamma^2 u^2 - [\sigma^2\gamma^2(1+k^2)u^2 + \partial^2 v^2]s^2 + k^2\sigma^2\gamma^2 u^2 s^4 = 0\ .$$

Eliminando adesso s fra questa e la prima delle (1), cioè

$$\gamma^2 u - \partial\, s + k^2\sigma^2 u s^2 = 0\ ,$$

si ottiene la equazione desiderata

$$(2)\qquad \begin{aligned} &\gamma^2\partial^4[k^2\sigma^2 u^2 + k^2\sigma^2 v^2 - \gamma^2]^2 \\ &-\partial^2(k^2\sigma^4 - \gamma^4)[k^2\sigma^2\gamma^2(1+\partial^2)u^2 + k^2\sigma^2\partial^2 v^2 - \gamma^2\partial^2] = 0. \end{aligned}$$

Eliminiamo ora la y fra le equazioni (1), ossia eliminiamo le tre quantità σ, γ, ∂ fra le (1) e le

$$\gamma^2 + \sigma^2 = 1 \quad , \quad \partial^2 + k'^2\sigma^2 = 1\ .$$

Dalla prima delle (1) e dalla prima di queste si cava

$$\sigma^2 = \frac{1 - \frac{s}{u}\partial}{d^2} \quad , \quad \gamma^2 = \frac{\frac{s}{u}\partial - k^2 s^2}{d^2}\ ,$$

e facendone la sostituzione nelle altre due, cioè nelle

$$c\,d\,\sigma\,\gamma = \frac{v}{u}\,s\,\partial \quad , \quad \partial^2 + k'^2\sigma^2 = 1$$

si hanno le due equazioni

$$\begin{aligned} &k^2 s^2 c^2 u^2 - s c^2 u(1 + k^2 s^2)\partial + s^2(c^2 + d^2 v^2)\partial^2 = 0 \\ &k'^2 u - d^2 u \qquad\qquad -k'^2 s\,\partial \qquad\qquad + \ d^2 u\,\partial^2 = 0\ . \end{aligned}$$

Eliminando infine ∂ fra queste due, si ottiene

$$(3)\qquad \begin{aligned} &k^2 s^2 c^2[d^2 u^2 + d^2 v^2 + c^2]^2 \\ &+(1 - k^2 s^4)[-c^2(1 - k^4 s^4)u^2 + k'^2 s^2 d^2 v^2 + k'^2 s^2 c^2] = 0. \end{aligned}$$

Ponendo rispettivamente nelle (2), (3)

$$A = \frac{\gamma^4 + k^2\sigma^4}{2k^2\sigma^2\gamma^2} \quad , \quad A = -\frac{d^4 + k^2 c^4}{2k^2 c^2 d^2}\ ,$$

ed inoltre $M^2 = u^2 + v^2$, l' una e l' altra equazione diviene

$$(4) \qquad M^4 - 2AM^2 + \frac{4(k^2A^2-1)}{(2A+1)k^2+1}u^2 + \frac{1}{k^2} = 0.$$

Per ogni dato valore di A, quest' equazione rappresenta una curva di quart' ordine per la quale i punti circolari all' infinito sono punti doppi (*a bicircular quartic*), come si fa evidente rendendo l' equazione omogenea col porre $\frac{u}{t}, \frac{v}{t}$ in luogo di u, v, e facendo successivamente $t=0$ ed $u \pm vi = 0$. Considerando la (4) come un' equazione di secondo grado in A, il prodotto delle radici è

$$\frac{(1-k^2M^2)^2 + k^2(1-M^2)^2 + 4k^2v^2}{-4k^4v^2}$$

e però negativo; dunque per ciascun punto del piano passano due curve reali l' una del sistema (2), l' altra del sistema (3). L' equazione (4) rappresenta entrambi i sistemi, e l' uno dei due se A supponesi o positiva o negativa. Scrivendo la condizione perchè i due valori di A dati dalla (4) siano eguali si ha la

$$[(u+1)^2+v^2][(u-1)^2+v^2]$$
$$[(ku+1)^2+k^2v^2][(ku-1)^2+k^2v^2] = 0,$$

cioè tutte le curve (4) hanno quattro fuochi reali comuni situati su Ou e corrispondenti alle ascisse $u = +1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ (*).

(*) Per ulteriori notizie su queste curve veggasi una Memoria del sig. Siebeck nei tomi 57 (pag. 359) e 59 (pag. 137) del giorn. di Crelle-Borchardt, dove (tomo 57, pag. 365) se ne trovano anche le figure, delle quali è la prima quella del caso da noi qui effettivamente contemplato.

Posta attenzione al già detto nella nota del § precedente, sarà affatto ovvio concepire come una rete coprente una sola volta un parallelogrammo del piano z (Fig. 18), formata da fili paralleli ai lati ossia agli assi, possa deformarsi, sotto le solite condizioni, in modo da coprire due volte l' intero piano w, coi fili disposti secondo le curve testè cercate. Le let-

SEZIONE TERZA

RIVISTA DELLE ESPRESSIONI ANALITICHE

CAPITOLO PRIMO

Classificazione.

§. **40**. Prima di impegnarci nello studio delle funzioni che non presupponga per esse alcuna espressione analitica, vogliamo passare in rapida rivista le varie sorta di funzioni od espressioni analitiche che in seguito avremo da impiegare, e che possono riguardarsi siccome il materiale di cui l'analista

tere piene e punteggiate fanno nella fig. 18 lo stesso officio che nella fig. 17. Il rettangolo A, per esempio, dovrà espandersi tanto da coprire un quarto di piano, e per modo che il lato l copra tutta la parte positiva dell'asse imaginario, ed i lati l', l'', l''' coprano tutta la parte positiva dell'asse reale (l' da 0 a 1, l'' da 1 a $\frac{1}{k}$, l''' da $\frac{1}{k}$ all'∞). Nella rete, trasformata in modo analogo a quello del § precedente, l'incrociamento ossia il passaggio dall'uno all'altro strato si presenterà più spontaneamente sopra le porzioni dell'asse reale da $-\frac{1}{k}$ a -1 e da 1 a $\frac{1}{k}$; ma potrà del resto, come è chiaro, imaginarsi pure secondo altre linee.

A concepire come veramente attuabili in tutta interezza cosifatte reti e loro trasformazioni sarebbero, già s'intende, da sostituirsi ai piani z e w due superficie chiuse di dimensioni finite, cioè, per fissar le idee, due sfere di raggio finito. Ma sarebbe inopportuno che ci trattenessimo adesso più a lungo intorno a coteste concezioni.

può disporre per tradurre in atto le proprie concezioni; e ciò nel dupplice intento di non supporre conosciute troppe cose che anche potrebbero non esserlo, e di generalizzare od altramente modificare in confronto dell' ordinaria maniera alcuni concetti fondamentali. Non è una rivista completa ed egualmente particolareggiata che ci proponiamo; pel contrario, lascieremo in disparte molte fra le cose che stimiamo sicuramente note a chicchessia, e di parecchie fra quelle stesse che non sono ancora molto divulgate non faremo che *ricordare* quanto a noi fa di bisogno, citando però fonti a cui possano attingere i vogliosi di maggiori informazioni.

Essendo infinita la varietà delle funzioni analitiche (*) imaginabili, divenne necessario di distinguerle in classi. In prima si stabilì una classificazione quasi esclusivamente basata sulla considerazione della forma; ma le ricerche moderne vanno sempre più mostrando la importanza e quindi allargando l'uso anche di distinzioni basate sulle proprietà (**).

§. 41. Quanto alla forma, le funzioni soglionsi distinguere in *esplicite* ed *implicite*, e sogliorsi inoltre distinguere a seconda del *numero* e della *natura* delle operazioni che entrano nella espressione del legame tra la variabile e la funzione.

Dicesi *esplicita* una funzione quando sia immediatamente espressa per mezzo della variabile; *implicita* invece quando sia

(*) Mentre ci permettiamo di qui qualificare in genere come *funzioni* le espressioni analitiche che vogliamo passare in rivista, ci riserbiamo però di dichiarare più tardi se tali poi sieno effettivamente quelle intorno alle quali reputiamo che potrebbesi avere incertezza.

(**) Anche astrazione fatta dall' essere questa *Sezione* dedicata precisamente alle forme od espressioni analitiche, rifletteremo che, mentre possiamo sin da ora indicare tutte le distinzioni stabilite in riguardo della forma, perchè ne possediamo già gli elementi necessari che sono le operazioni aritmetiche, altrettanto non potremmo fare per le distinzioni dell' altra sorta; le quali si presenteranno invece gradatamente in seguito, allorchè, intrapreso lo studio generale delle funzioni, andremo via via riconoscendo quali siano le proprietà o caratteri che meritano di essere assunti come gli elementi della classificazione. Di queste proprietà talune del resto vengono già offerte dall' analisi elementare. Tale è la periodicità, onde le funzioni sogliorsi già anche nell' analisi elementare distinguere in *non periodiche* e *periodiche*. Nella presente *Sezione* ci accontentiamo di dare le distinzioni delle funzioni basate sul numero dei valori ch' esse prendono per ogni singolo valore della variabile (§. 44).

definita per mezzo di una equazione fra essa e la variabile, o di più equazioni contenenti, oltre queste due, anche altre quantità variabili. Una funzione data in prima come implicita potrà rendersi esplicita quando si sappia risolvere rispetto ad essa la equazione o le equazioni che la involgono. Una funzione può essere essenzialmente implicita fintantochè resti fissato di non poter disporre che di certi segni di operazioni o funzioni, e figurare invece come esplicita quando si possa disporre anche di altri segni.

§. 12. Riguardo al *numero* delle operazioni una prima distinzione è quella delle funzioni in *semplici* e *composte*. Dicesi *semplice* una funzione quando richieda l'effettuazione di una sola operazione sulla variabile. Prendendo le operazioni aritmetiche nella maggior estensione che vedemmo potersi loro attribuire, otterremo tutte le funzioni semplici riguardando nelle formole (1) del §. 4 come variabile l'una e poi l'altra delle due lettere che le compongono. Lasciando in disparte quella in cui la variabile figurerebbe come base di sistema di logaritmi, ne risulteranno le seguenti funzioni semplici (*).

$$(1) \qquad a+z\ ,\ a-z\ ,\ az\ ,\ \frac{a}{z}\ ,\ z^a\ ,\ a^z\ ,\ \mathrm{Log}_a z\ ,$$

delle quali le due ultime non verranno da noi impiegate che nel supposto di $a=e$ e nella estensione stabilita nel §. 15.

Come semplici veggonsi però considerate anche altre funzioni dagli analisti, e ciò dipende dal punto di vista al quale si vuol portarsi. Riguardando non già dal detto punto di vista aritmetico, ma, per esempio, da punto di vista geometrico, la funzione $\mathrm{sen}\, z$ e propriamente una infinità di altre funzioni possono essere semplici ed indipendenti nella loro origine. Si può asserire che qualsia dipendenza di uno da altro elemento

(*) È superfluo il far riflettere che, non dovendosi avere in questa classificazione alcun riguardo alla natura delle costanti nelle funzioni, le formole

$$z-b=(-b)+z\ ,\quad \frac{z}{b}=\frac{1}{b}\cdot z$$

coincidono colle $a+z$, az.

geometrico variabile può dar origine ad una di coteste funzioni. Si potrà trattare tale funzione coi procedimenti propri della geometria, scoprendone le proprietà, come appunto si fece per *sen z*. Ma, se, fatta astrazione dalla natura geometrica, si considera soltanto la relazione numerica tra questi elementi variabili espressi pei rapporti che hanno colle rispettive unità, si è condotti a scorgere nella funzione concreta non altro che una funzione astratta od aritmetica, la quale, aritmeticamente considerata, se non sia fra le (1), potrà noverarsi fra le composte. Così, in particolare, le funzioni circolari *sen z*, *cos z* potranno dirsi composte mediante la funzione e^z giusta le formole d' Eulero (§. 38); e le loro inverse *arc sen z*, *arc cos z* composte mediante la funzione logaritmica.

Riguardo al numero delle operazioni si distinguono ulteriormente le funzioni od espressioni in *finite* ed *infinite*, secondochè sia finito od infinito il numero delle operazioni designate nella espressione. Non v' è difficoltà di concepire espressioni analitiche nelle quali il numero delle operazioni vada con determinata legge crescendo quanto si vuole, e così, come limite, può aversi la idea di espressioni che vorrebbero un numero infinito di operazioni.

In ordine di semplicità si presentano in prima quelle espressioni infinite in ciascuna delle quali *una* soltanto delle operazioni elementari entra *essenzialmente* una infinità di volte. S' imagini dato un sistema *semplicemente* infinito di quantità (*) esteso od in un solo senso

(2) $$Q_1, Q_2, \ldots\ldots, Q_m, \ldots$$

ovvero in entrambi i sensi

(3) $$\ldots Q_{-m}, \ldots Q_{-2}, Q_{-1}, Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_m, \ldots.$$

(*) Come già si è detto, un simile dato potrebbe tosto, per esempio, attuarsi fissando una quantità Q_m la quale dipendesse da un' indice m destinato a prendere tutti i valori numerici interi (positivi, o negativi, o d' entrambi i segni). Per ora non importa imaginare le quantità Q come dipendenti dalla solita variabile z.

S' imagini parimenti dato un sistema *doppiamente* infinito di quantità, quale

$$
(4) \qquad \begin{array}{ccccccc}
Q_{1,1} & Q_{2,1} & . & . & Q_{m,1} & . & . \\
Q_{1,2} & Q_{2,2} & . & . & Q_{m,2} & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
Q_{1,n} & Q_{2,n} & . & . & Q_{m,n} & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

ovvero quale

$$
(5) \qquad \begin{array}{ccccccc}
. & . & . & . & . & . & . \\
. & Q_{-2,-2} & Q_{-1,-2} & Q_{0,-2} & Q_{1,-2} & Q_{2,-2} & . \\
. & Q_{-2,-1} & Q_{-1,-1} & Q_{0,-1} & Q_{1,-1} & Q_{2,-1} & . \\
. & Q_{-2,0} & Q_{-1,0} & Q_{0,0} & Q_{1,0} & Q_{2,0} & . \\
. & Q_{-2,1} & Q_{-1,1} & Q_{0,1} & Q_{1,1} & Q_{2,1} & . \\
. & Q_{-2,2} & Q_{-1,2} & Q_{0,2} & Q_{1,2} & Q_{2,2} & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}
$$

Ed in generale s'imagini un sistema quanto si vuole *moltiplicemente* infinito di quantità. Ora, se si esprime che tutte le quantità di uno dei sistemi imaginati sono da congiungersi insieme per via di addizione, si ha una espressione infinita che dicesi *somma infinita.* Per via di sottrazione si avrebbe una espressione identica, nel senso generale, alla precedente; arbitraria essendo la natura delle quantità Q. Se si esprime che tutte le quantità Q sono da congiungersi per via di moltiplicazione, si ha una espressione infinita che dicesi *prodotto infinito.* Coteste somme e prodotti diconsi *semplicemente*, *doppiamente*, ecc. infiniti, secondochè risultino da un sistema di quantità Q semplicemente, o doppiamente, od ecc. infinito. Se il sistema sarà il (2), la somma ed il prodotto si potranno esprimere colle scritture

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \text{ ecc.}$$
$$Q_1 \;.\; Q_2 \;.\; Q_3 \;.\; \text{ecc.}$$

Oltre le somme ed i prodotti infiniti è noto che si sono pure studiate espressioni involgenti una infinità di volte, insieme colla prima o seconda, anche la quarta operazione razionale, cioè la divisione, e che le medesime si sogliono rappresentare come segue

$$Q_1 + \cfrac{Q_2}{Q_3 + \cfrac{Q_4}{Q_5 + \cfrac{Q_6}{Q_7 + \ddots}}}$$

e chiamare *frazioni continue* (*). Noi però non ci tratterremo su queste espressioni, delle quali non faremo uso nel nostro corso; esse non hanno acquistato nella ricerca delle proprietà delle funzioni la importanza che è loro dovuta nelle ricerche strettamente chiamate aritmetiche (**).

Una espressione infinita suol dirsi *complessa* quando si ritengano complesse tutte od in parte le quantità che la compongono. In questo corso, anche tralasciando il detto epiteto, intenderemo, in generale, che le quantità Q possono essere qualunque, cioè tanto complesse quanto, come caso particolare, reali.

§. 43. Riguardo alla *natura* delle operazioni le funzioni distinguonsi in *algebriche* e *trascendenti*, come le operazioni aritmetiche stesse. Diconsi *algebriche* le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevazione a potenza d'esponente razionale; *trascendenti* le altre. Perciò *algebrica* dicesi una funzione quando il legame fra essa e la variabile (***)

(*) Quest'altro uso del vocabolo *continuo* può dirsi poco felice. Migliore si riconoscerà la denominazione tedesca (*Kettenbruch*).

(**) La formazione di espressioni infinite per via di operazioni non razionali dovette naturalmente rimanere quasi del tutto inconsiderata, non compiendosi per loro mezzo l'attuazione numerica cioè dire l'effettiva traduzione in cifre, per la quale vuolsi sempre in fine venire nelle operazioni razionali. Ed è appunto, come si sa, principalmente nella mira di sostituire sistemi di operazioni razionali all'altre operazioni o funzioni (semplici e composte) che s'introdussero nell'analisi le espressioni infinite.

(***) Prendiamo di mira il caso di una sola variabile indipendente. Però osserviamo che tutte queste denominazioni si applicano del pari alle funzioni di più variabili, ove abbiano rispetto a ciascuno delle variabili separatamente la forma che le denominazioni stesse significano.

possa esprimersi mediante un numero finito di operazioni algebriche (*); *trascendente* in ogni altro caso (**).

Le funzioni algebriche restano così definite, in generale, come funzioni implicite; tuttavia esse possono talvolta aversi esplicitamente. Allora, se per formare la espressione di essa sono necessarie soltanto le prime quattro operazioni, la funzione vien detta *razionale*; se sono necessarie soltanto le prime tre, vien detta *razionale intera*. I tipi, ai quali possono sempre supporsi ridotte le funzioni razionali intere e fratte, sono rispettivamente:

$$c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m ,$$

$$\frac{c_0 + c_1 z + \dots + c_m z^m}{c'_0 + c'_1 z + \dots + c'_m z^m} .$$

Una equazione che definisce una funzione algebrica può sempre trasformarsi in guisa da non contenere nè radicali, nè divisori involgenti le variabili, e quindi può sempre supporsi ridotta al tipo

$$(1) \qquad \varphi_0 w^n + \varphi_1 w^{n-1} + \dots + \varphi_n = 0 ,$$

dove $\varphi_0, \varphi_1, \dots \varphi_n$ sieno funzioni razionali intere di z.

Qualunque funzione algebrica è continua, e, giusta le definizioni stabilite nella Sezione seconda, *lo è senza eccezioni*,

(*) Già s'intende sempre operazioni da farsi sulle variabili indipendenti e dipendenti. Delle costanti non si suppone nulla che ne limiti la natura, e quindi potrebbero imaginarsi provenienti da altre costanti per via di qualunque sistema di operazioni.

(**) Questa distinzione non la si troverà posta da tutti gli scrittori negli stessi termini. Evidentemente l'elevazione a potenza d'esponente intero può comprendersi nel novero delle moltiplicazioni; l'estrazione di radice può ridursi ad estrazioni di radici d'indice primo. Pensando che da una equazione algebrica possono sempre farsi sparire i radicali ed i divisori involgenti le variabili, si scorge potersi la definizione di funzione algebrica porre come segue: algebrica dicesi una funzione quando il legame fra essa e la variabile possa esprimersi mediante un numero finito delle tre prime operazioni.

Aggiungiamo poi che si ritroveranno non soltanto differenze di parole, ma ben'anche discordanze essenziali. Prenderemo, ad esempio, un passo dello stesso Cauchy. Nell'*Analyse alg.* (pag. 24) ammette nella composizione delle funzioni algebriche l'*élévation à des puissances fixes*, che possono quindi essere anche di esponente irrazionale; e ciò può vedersi in altri luoghi (*Exerc. d'An. et de Phys. math.*, tomo 3, pag. 376) anche esplicitamente dichiarato.

cioè dire, è affatto scevra da discontinuità. E propriamente ha luogo il teorema che segue (*). Sia $F(w,z)=0$ la equazione (della forma testè esposta) che definisce la funzione algebrica cui s' intende considerare. Sia z_0 un valor particolare qualsivoglia di z, e sieno $w_0', w_0'', \ldots, w_0^{(n)}$ gli n valori corrispondenti di w, cioè le n radici dell' equazione $F(w,z_0)=0$. Facendo variare z in modo continuo a partire dal valore z_0, gli n valori di w varieranno pure in modo continuo, dando luogo ad n successioni continue di valori, che avranno per valori iniziali rispettivamente i numeri $w_0', w_0'', \ldots, w_0^{(n)}$. Se r fra questi numeri o radici dell' equazione $F(w,z_0)=0$ fossero eguali tra loro, r fra le successioni anzidette principierebbero con valori eguali; ma non cesserebbero per questo di essere r successioni continue e *distinte*, a meno che la equazione $F(w,z)=0$ avesse radici eguali per qualunque valore di z, ossia i polinomi $F(w,z)$ e $\dfrac{\partial F(w,z)}{\partial w}$ ammettessero un divisor comune. Ciascuno di quei casi, in numero limitato ma non meno essenziali a considerarsi, nei quali alcuni dei valori $z_0, w_0', w_0'', \ldots, w_0^{(n)}$ possono essere infiniti, si può tosto ricondurre, se vuolsi, al caso generale di $z_0, w_0', w_0'', \ldots, w_0^{(n)}$ finiti, usando, fra gli altri modi, dell' una o dell' altra o di entrambe le sostituzioni

$$w'-h'=\frac{1}{w-h}\ ,\quad z'=\frac{1}{z}\ ,$$

dove w', z' significano nuove variabili e h, h' costanti disponibili.

Avendo definito compiutamente il significato delle espressioni semplici, (1) §. 42, è chiaro che resta per ciò stesso definito il significato di qualsia espressione composta purchè finita. A completare pertanto ciò che riguarda il significato di tutte le classi di espressioni analitiche che potranno occorrere restano da considerare le espressioni infinite.

(*) Questo teorema, come già indicammo, a pagg. 69 e 79, fu stabilito da Cauchy nella Memoria *Sur la nat. et les propr. des racines d' une equat.* ecc.

§. 44. Ma prima termineremo questo capitolo di classificazione, indicando sin d'ora alcune di quelle distinzioni (tra le funzioni) le quali non si fondano sulla considerazione della forma: e cioè le distinzioni basate sul numero dei valori che le funzioni ammettono per ogni particolare valore della variabile, distinzioni che devonsi intendere stabilite affatto generalmente per quali si siano funzioni, vale a dire, senza che di queste sia da presupporsi alcuna espressione analitica.

Vi hanno funzioni che ammettono assolutamente un solo valore per ciascun valore della variabile: tali sono le algebriche razionali; tali pure possiamo dichiarare, per esempio, le funzioni

$$(1) \qquad e^z\,,\ \operatorname{sen} z\,,\ \cos z\,,\ \tan z\,,\ \text{ecc.},$$

sebbene vadano soggette ad una eccezione, cioè per $z=\infty$ ammettano come valore qualsiasi numero. Vi hanno funzioni che ammettono due, tre, ecc. un dato numero n qualsiasi di valori per ciascun valore della variabile. Una funzione algebrica, definita, come si è indicato nel precedente §, da una equazione della forma

$$\varphi_0 w^n + \varphi_1 w^{n-1} + \ldots + \varphi_n = 0\,,$$

ammette n valori per ciascun valore della variabile; ed n parimenti possiamo dire che ne ammette una funzione definita da una equazione della forma stessa precedente, in cui però i coefficienti

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$$

sieno formati razionalmente, non colla sola z, ma eziandio colle funzioni (1); sebbene siavi eccezione per $z=\infty$.

Ciò premesso, riterremo le funzioni distinte in: *funzioni a un solo valore* e *funzioni a più valori* ovvero, determinatamente, *a due*, *a tre*, . . . , *a n*, . . . valori (*).

(*) Se come funzioni a n valori non si volessero qualificare se non che quelle le quali hanno n valori per ciascun valore della variabile *senza eccezione alcuna*, si ristringerebbe di troppo la portata e quindi l'opportunità di questa denominazione. A suo tempo infatti riconosceremo che funzioni continue ed ammettenti n valori per ogni valor della variabile *senza eccezioni* non possono essere che le algebriche.

A fianco di questa giova però stabilire un'altra distinzione, che non caratterizza le funzioni in modo del pari assoluto, supponendo la variabilità della variabile limitata da qualche confine.

Consideriamo una funzione w a più valori, quale per fissar le idee, la w definita dalla equazione algebrica $F(w,z)=0$ del grado n rispetto a w. Questa funzione ha bensì n valori per ogni valore di z; ma se, fissato un valor iniziale z_0 di z, si prende come valore corrispondente di w *una*, w_0', *delle* n *radici*, supposte diverse, della equazione $F(w,z_0)=0$, e si stabilisce che i valori di w, al variare continuo di z, debbano essere quelli che succedono con continuità al già assunto, è chiaro che per un certo tratto la w rimarrà affatto determinata come se fosse funzione a *un* valore. E precisamente rimarrà determinata finchè z non arrivi ad un qualche valore o punto a (*) pel quale il valor corrispondente di w cessi di essere radice semplice divenendo radice multipla (diremo $m$upla) della equazione $F(w, z)=0$. Passando z dal punto a ad altro infinitamente vicino, avremo m variazioni infinitesime corrispondenti per w, e quindi, non ostante la scelta iniziale della radice w_0', ricomparirà una pluralità di valori leciti per w; poichè la continuità rimarrà del pari soddisfatta prendendo una qualsiasi di queste variazioni per proseguire la successione dei valori di w principiata con w'_0.

E non si ha nemmeno da credere che, vietando alla z di passare pei punti a, la w rimanga, in virtù della scelta iniziale, così determinata che, ogni qualvolta z ritorni ad uno stesso punto, essa pure riprenda lo stesso valore. Al contrario, se z ritornerà ad uno stesso punto dopo aver compiuto qualche giro intorno a qualcuno dei punti a, la funzione w non riprenderà generalmente il valore ivi da prima ottenuto.

Ma la completa disamina del modo di comportarsi di una funzione a più valori è riservata ad altra *Sezione* (**), e quindi

(*) Ci riferiamo al solito piano z.

(**) Cioè alla *Sezione sesta*. Potremmo ricordare, per adesso, il cenno dato nelle *Notizie*, pag. 78-82, circa le *Recherches* ecc. del sig. Puiseux.

per adesso contentiamoci di raffermare queste poche premesse necessarie a comprendere la distinzione che abbiamo di mira, considerando un caso particolare.

Sia il caso di $F(w,z)=w^2-z=0$. In questo caso sono due i valori di w per ogni valore di z, e non divengono eguali che per $z=0$ e $z=\infty$. Per un qualunque valore di z possiamo rappresentare i due valori di w separatamente come segue

$$(2)\qquad w'=r^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\omega}{2}i}\ ,\quad w''=r^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\omega+2\pi}{2}i}$$

dove r, $r^{\frac{1}{2}}$, ω significano, come al solito, il modulo, la sua radice quadrata positiva, ed uno degli argomenti di z. Facciamo ora partire z dal punto z_0 e consideriamo le due successioni continue di valori scaturienti dalle due formole ora scritte, successioni che principieranno coi due valori di $w_0=z_0^{\frac{1}{2}}$ esprimibili come segue

$$(3)\qquad w_0'=r_0^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{\omega_0}{2}i}\ ,\quad w_0''=r_0^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\omega_0+2\pi}{2}i}\,.$$

I valori a cui queste due successioni condurranno, allorchè z ritornerà al punto z_0, saranno rispettivamente quei di prima, se il cammino di z non inchiuderà alcun giro (*) intorno al punto 0, oppure ne inchiuderà un numero pari; e saranno invece quei di prima ma scambiati tra loro, se z avrà fatto un numero dispari di giri intorno al detto punto (**). Se, per esempio, imaginiamo che z percorra nel senso positivo degli angoli una circonferenza di centro 0, allora, lungo siffatto cammino, il modulo r rimarrà costantemente r_0 mentre ω crescerà in modo continuo da ω_0 a $\omega_0+2\pi$. Nelle due successioni adunque i valori di w, dall' essere inizialmente quelli indicati dalle (3), diverranno per gradi insensibili in fine i seguenti

(*) Non devesi intendere strettamente un giro fatto sopra una circonferenza di cerchio, ma anche su linea rientrante di qualsiasi altra natura.

(**) Ciò riesce evidente se, scambiando le lettere z e w tra loro, si richiama il §. 33.

$$r_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\omega_0+2\pi}{2}i}, \quad r_0^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\omega_0+4\pi}{2}i},$$

che sono i (3) scambiati tra loro.

Ciò premesso, si comprende, stando ancora per un momento nel semplice caso di $w^2 - z = 0$, che, se si limita la variabilità della z ad una porzione di piano entro la quale essa z non possa mai compiere un numero dispari di giri intorno a 0, entro siffatta porzione la w (fissato inizialmente uno de' suoi due valori in un punto, ed avuto rispetto alla continuità) si comporterà come una funzione a valor unico, cioè riprenderà sempre lo stesso valore qualvolta z ripasserà per uno stesso punto. Una porzione di piano della natura richiesta sarebbe, per esempio, un cerchio non contenente il punto 0. Tale invece non sarebbe un cerchio che contenesse il punto 0, od una corona circolare che avesse in 0 il centro.

Or bene, in generale, se una funzione w ed una porzione S del piano sieno tali che, movendosi z comunque entro S, la funzione riprenda sempre per successione continua lo stesso valore ogni qualvolta z ritorni in uno stesso punto, si dirà che *w è monodroma entro S.* In ogni altro caso si potrà dire che *w è polidroma entro S.* È questa la distinzione che volevamo far conoscere (*).

(*) Le due nomenclature, cioè quella per la distinzione *assoluta* delle funzioni in funzioni a uno ed a più valori, e quella ora esposta e *riferentesi* ad una qualche porzione del luogo rappresentativo dei valori della variabile, non trovansi finora simultaneamente usate che in Germania, e propriamente nella scuola del sig. Riemann. Assumendole noi pure entrambe, non intendiamo perciò disconoscere come, sacrificando alcun poco di brevità, si possa supplire ai bisogni della esposizione anche soltanto coll' una o coll' altra. Invece, per esempio, di *funzione a un valore* si potrebbe dire *funzione monodroma in tutto il piano della variabile.* Ciò si vedrà usato nell' opera dei sigg. Briot e Bouquet.

Abbiamo già detto (pag. 72 delle *Notizie*) che il vocabolo monodroma (da μόνος, solo, e δρόμος, corso) fu introdotto da Cauchy. Il sig. Riemann lo tradusse in *einändrig.* I vocaboli poi dell' altra sorta, proposti da questo illustre matematico (*Crelle-Borchardt*, tomo 54, pag. 102-103), sono *einwerthig* (a un valore) e *mehrwerthig* (a più valori); essi hanno il pregio di non inchiudere alcuna idea estranea a quella di numero. Altrettanto non può asserirsi dei vocaboli *eindeutig* e *mehrdeutig* tuttora molto usati. Noi ci permettiamo di esprimere anche in questa occasione il desiderio che venga tolta la superflua molteplicità dei vocaboli.

In particolare adunqne, ritornando alla funzione $w=z^{\frac{1}{2}}$, essa potrà dirsi monodroma in un cerchio non contenente il punto $z=0$, e polidroma, e precisamente 2droma, in un cerchio contenente il detto punto.

CAPITOLO SECONDO

Serie.

§. **45**. Le somme infinite si distingnono in due classi, e cioè: diconsi *serie* quando le quantità ossia i termini Q sieno ciascuno di una grandezza determinata, tendente del resto a zero col crescere del posto o indice del termine; *integrali* qnando le quantità Q sieno infinitesime. In questo capitolo considereremo le serie.

§. **46**. Per qualsiasi espressione infinita, e quindi anche per le serie, si ha tosto da rispondere a questa domanda fondamentale: come si possa stabilirne un valore ossia un significato preciso? Il valore di una espressione infinita non può definirsi dicendo, senz' altro, ch' esso è il risultato che si ottiene effettuando tutte le operazioni indicate; imperocchè non è possibile di eseguire effettivamente una infinità di operazioni. Il valore, come la composizione stessa dell' espressione, non può concepirsi se non che per mezzo dell' idea di limite. Ognun sa, del resto, che le espressioni infinite devono appunto il loro ingresso nella scienza al pensiero di calcolare ed anche di confrontare tra loro più facilmente le grandezze, considerandole come limiti di aggregati di altre grandezze di specie più semplice.

Presso gli scrittori francesi si vedranno usate anche le espressioni *fonction bien déterminée*, *fonction mal déterminée*, che sembrerebbe meglio abbandonare. Si riconoscerà pure nè necessario nè opportuno l' uso che si fa della espressione *funzione uniforme*.

Per ogni espressione infinita si dovrà dunque prendere le mosse dalla considerazione di una espressione finita, la quale, al crescere del numero N delle quantità Q di cui si componga, tenda a produrre la espressione infinita.

Trattandosi della somma infinita delle quantità (5) §. 42, si potrà, per esempio, prendere per la detta espressione finita la somma abbracciante i termini $Q_{m,n}$ dei quali gli indici soddisfacciano alla condizione

$$m^2 + n^2 < R^2 ,$$

essendo R^2 (da cui dipenderà N) quantità destinata a crescere infinitamente.

Se, al crescere di N, il valore della espressione finita tenderà verso *un* limite finito, sarà questo limite la quantità da riguardarsi come *valore della espressione infinita*, in quanto però questa si consideri come proveniente dalla espressione finita imaginata. Ed in tal caso la espressione infinita, così interpretata, si dirà *convergente*. Essa direbbesi, invece, *indeterminata ed oscillante* qualora il valore della espressione finita, anzichè tendere ad un'unica quantità finita, continuasse pur sempre, nell'infinito crescere di N, a prendere ora uno ora altro valore finito, a seconda del valore di N. Finalmente si direbbe *divergente* qualora il modulo del valore della espressione finita andasse crescendo illimitatamente con N.

È affatto ovvio di comprendere non darsi una sola maniera di concepire formata una espressione finita capace di condurre ad una fissata espressione infinita. Ritornando, per esempio, alla somma infinita delle quantità (5) §. 42, si potrà variare in infinite guise la condizione ($m^2+n^2<R^2$) prescrivente i termini che ogni volta devono intendersi abbracciati nella somma finita. Imaginiamo, per fissar le idee, le quantità $Q_{m,n}$ distribuite su di un piano in modo che ciascuna occupi quel punto le cui coordinate cartesiane, rispetto a due assi ortogonali ivi tracciati, abbiano per misura gli indici (m,n) della quantità stessa. La condizione $m^2+n^2<R^2$ stabilirebbe che la espressione finita dovesse

abbracciare tutte le quantità Q giacenti entro la circonferenza di centro O e di raggio R. Ma, invece di una circonferenza, si potrebbe, evidentemente, prendere un' ellisse più o meno allungata, un perimetro rettangolare, o quanti altri diversi perimetri piacesse, che ingrandendo tendessero ad abbracciare tutto il piano.

Cambiando la legge di formazione della espressione finita, questa potrà talvolta convergere ancora verso il limite di prima, tal'altra invece convergere verso un limite differente, e tal'altra infine oscillare o divergere; laonde evvi luogo a riconoscere espressioni infinite di valore o significato unico, indipendente cioè dalla legge di formazione della espressione finita, ed espressioni infinite suscettibili di differenti significati, od anche suscettibili di esprimere o non esprimere una quantità determinata, a seconda delle leggi di formazione delle espressioni finite d' onde si considerano come provenienti. Comunque sia però, una espressione infinita potrà adoperarsi come rappresentativa di un'unica quantità determinata, ogni qualvolta sia fissata per la medesima la legge di formazione anzidetta, e riesca convergente. Tuttavia è uno dei fondamentali e più importanti quesiti nella teorica di ciascuna specie di espressioni infinite quello di trovare: se e come la convergenza ed il valore della espressione infinita dipendano dalla legge di formazione della espressione finita?

§. 47. Le serie che soglionsi considerare in prima sono quelle della forma

(1) $$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$

L' espressione finita, dalla quale una serie siffatta si suole considerare come proveniente, è la somma dei primi m $(N = m)$ termini. Indicando questa somma con Φ_m, e con Φ una determinata quantità finita, la condizione della convergenza può esprimersi colla scrittura

$$\lim \Phi_m = \Phi.$$

Ammetteremo siccome notissimi i teoremi di convergenza basati sulla considerazione del rapporto $\frac{Q_{m+1}}{Q_m}$ o della radice $Q_m^{\frac{1}{m}}$; ma ne adopreremo anche altri, che dichiareremo nelle singole occasioni.

L' anzidetta legge di formazione della somma finita è quella che si presenta naturalmente ed è la più semplice; ma, conformemente al già detto in generale, non è la sola concepibile. Si potrebbe, per esempio, imaginare che la somma finita dovesse constare dei termini che nella disposizione (1) occupano i primi *am* posti dispari ed i primi *bm* posti pari, intendendo con *a* e *b* numeri interi positivi ed invariabili al crescere di $N = am + bm$. Si potrebbe riflettere che cambiare la legge di formazione della somma finita vale quanto considerare non più la serie proposta, ma una novella serie. Così, nell' esempio imaginato, si verrebbe a considerare non più la serie (1), ma un' altra i cui singoli termini sarebbero gruppi di $a+b$ termini della prima, ossia il cui termine *m*esimo sarebbe

$$Q_{2(m-1)a+1} + Q_{2(m-1)a+3} + \dots\dots + Q_{2ma-1}$$
$$+ Q_{2(m-1)b+2} + Q_{2(m-1)b+4} + \dots\dots + Q_{2mb}$$

invece di Q_m. Ma comunque si voglia riguardare, il quesito non cessa di essere fondamentale ed importante anche nella particolare teorica delle espressioni infinite della specie (1). Per attenerci al modo più consueto di considerare cotesta questione, riterremo d' ora innanzi che, per le serie della forma (1), la espressione finita debba sempre essere la somma dei primi *m* termini, e proporremo la questione stessa nella seguente maniera: quale influenza possano esercitare sulla convergenza e sul valore di una serie le alterazioni nell' ordine (compresi gli aggregamenti e i disgregamenti) dei termini? A questa domanda ci contenteremo per adesso di rispondere col ricordare il seguente importante teorema stabilito da Dirichlet: *affinchè una serie rimanga convergente e non cambi di valore alterando comun-*

que l' ordine dei termini è necessario e sufficiente che sia convergente la serie dei moduli di essi termini (*).

§. **48**. Insieme col quesito su esposto si presenta pure come fondamentale il seguente: come si possano attuare le operazioni aritmetiche sulle serie? Giova riflettere, in generale, come già tacitamente per le alterazioni nell' ordine dei termini, che non si possono trasportare, senza un nuovo esame, nel campo delle espressioni infinite le regole ed i teoremi valevoli per le espressioni finite. Ora, riguardo alle operazioni di addizione, sottrazione e moltiplicazione di serie semplici ricorderemo essersi stabiliti i seguenti teoremi.

Se due serie

$$Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m + \dots$$
$$Q_1' + Q_2' + \dots + Q_m' + \dots$$

sono convergenti ed hanno per somme Φ *e* Φ', *sarà pure convergente la serie*

$$(Q_1 \pm Q_1') + (Q_2 \pm Q_2') + \dots + (Q_m \pm Q_m') + \dots$$

ed avrà per somma $\Phi \pm \Phi'$.

Se due serie, quali sono le precedenti, rimangono convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, ed hanno per somme Φ *e* Φ', *sarà pure convergente, tale essendo se riduconsi i suoi termini ai moduli rispettivi, la serie*

$$Q_1Q_1' + (Q_2Q_1' + Q_1Q_2') + \dots + (Q_mQ_1' + Q_{m-1}Q_2' + \dots + Q_1Q_m') + \dots$$

ed avrà per somma $\Phi\Phi'$.

Da quest' ultimo teorema deduconsi quelli per le restanti operazioni razionali, cioè per la divisione e l' elevazione a potenza d' esponente intero.

§. **49**. Se si suppone che i termini Q dipendano da una variabile z, si presenta tosto la domanda: se sussistano anche per le somme infinite le proprietà che sussistono ed incessantemente s' adoprano per le somme finite, e che ne fanno dipendere la continuità, la derivazione e la integrazione da quelle

(*) Per uno studio ordinato delle serie si può ricorrere all' eccellente *Trattato di Algebra Superiore* (Parte I: Analisi algebrica. Firenze, 1863) del sig. G. Novi.

dei singoli termini? A questa domanda risponde il seguente teorema.

Se, entro una porzione S del piano z, le

$$Q_1(z)\ ,\quad Q_2(z), \ldots$$

siano funzioni monodrome continue finite, e la serie

$$Q_1(z) + Q_2(z) + \ldots .$$

sia convergente:

1. *La somma* $\Phi(z)$ *di questa serie sarà pure funzione monodroma continua e finita entro S;*

2. *Entro S si avrà*

$$\frac{d\,\Phi(z)}{dz} = \frac{d\,Q_1(z)}{dz} + \frac{d\,Q_2(z)}{dz} + \ldots ;$$

3. *Si avrà pure*

$$\int \Phi(z)\,dz = \int Q_1(z)\,dz + \int Q_2(z)\,dz + \ldots ,$$

intendendo che gli integrali sieno presi tutti lungo una medesima linea di lunghezza finita tracciata entro S (*).

(*) Pel qui supposto concetto della integrazione con variabile complessa vedasi il capitolo quarto della corrente *Sezione*, od anche le *Notizie* a pagg. 72-74.

L' asserzione 3 del teorema si dimostra facilissimamente. Ma non così le asserzioni 1 e 2; delle quali, nella generalità con cui qui sono profferite, non comparve per le stampe finora, a nostro credere, altra dimostrazione fuorchè quella del sig. H. Laurent. Questo matematico dimostrava il teorema in una tesi presentata alla Facoltà delle Scienze di Nancy, e posteriormente anche nella pregevole *Théorie des Résidus* (pagg. 97-111) da lui pubblicata a Parigi nel 1865. Alle dette asserzioni, prese in estensione minore, si riferiscono, come già indicammo, i n. 15, 16, 73 dell' opera dei sigg. Briot e Bouquet.

Nel presente argomento, della continuità e derivazione delle serie, non meno che in tutte le altre parti, come vedremo, dell' analisi delle funzioni, la considerazione della variabilità complessa, congiunta coll' addottato concetto di funzione, permette di introdurre una regolarità e semplicità, che non si può avere quando la variabile è limitata a punti-valori costituenti una estensione di una sola dimensione, cioè dire infine, a valori reali. Dal supporre *soltanto* che una quantità sia funzione continua e finita di una variabile reale in un determinato intervallo non può trarsi la conseguenza che anche la derivata debba essere continua e finita in quest' intervallo. Siffatta conseguenza invece discende benissimo, come vedremo, dal supporre che la quantità sia funzione continua e finita per tutti i punti-valori della variabile costituenti una estensione di due dimensioni, cioè una porzione S del piano rappresentativo. Analogo divario in rispetto di una serie, secondochè i termini suppongonsi soltanto funzioni continue e finite di una variabile reale, ovvero suppongansi fun-

§. 50. Consideriamo adesso in particolare la classe delle serie progredienti secondo le potenze intere e positive della variabile, le quali tengono posto importantissimo fra le varie classi di serie adoperate, e designiamone una qualunque con

$$(1) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

Tutto ciò che vogliamo rammentare circa serie come questa varrà anche per serie della forma

$$(2) \qquad a_0 + a_1(z-\tau) + a_2(z-\tau)^2 + \ldots,$$

zioni continue e finite di una variabile complessa; od anche secondochè la convergenza sussista soltanto per punti-valori reali ovvero per punti-valori secondo due dimensioni. Così, prendendo l' esempio dato da Abel nell' occasione che qui sotto citeremo, i singoli termini della serie

$$\operatorname{sen} z - \frac{\operatorname{sen} 2z}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3z}{3} - \ldots.$$

sono bensì funzioni della variabile complessa z, e continue e finite per qualunque valore finito di z; ma, la convergenza sussistendo soltanto per valori reali di z, la somma della serie non potrebbesi anticipatamente ritenere continua per tutti i valori reali e finiti di z. Ed invero l' applicazione dei criteri della continuità rivela ch' essa somma è discontinua pei valori di z che sono multipli dispari di π. Ed è chiaro che la serie delle derivate dei singoli termini non è convergente.

Del resto, si noterà che le conseguenze in discorso non riescono stabilite anche per i punti del contorno della porzione S di piano entro cui la variabile può muoversi, ma soltanto per i punti situati decisamente nell' interno di S, cioè per ogni punto intorno al quale come centro si possa imaginare un cerchio di qualsiasi piccolezza ma ancora finito, i cui punti appartengano tutti ad S. La serie

$$\frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{3.4} + \ldots.$$

è convergente per tutti i punti z giacenti nell' interno e sul contorno del cerchio di raggio 1 e di centro 0, ma la serie delle derivate

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots.$$

pel punto $z=1$ del contorno non è convergente.

Nell' analisi con variabile reale, assai più che nell' analisi con variabile complessa, la continuità e la derivazione delle serie costituiscono un argomento delicato, che domanda ulteriori perfezionamenti. Nell' *Analyse alg.* Cauchy presentava (pag. 131) circa la continuità un teorema troppo generale. Abel nella *Memoria sulla serie binomiale* dichiarava pel primo l' errore di Cauchy, esponendo due altri teoremi in sua vece (OEuvres compl. Tomo 1, pagg. 69-71 Théor. IV e V), del primo dei quali una bella dimostrazione dovuta a Dirichlet leggesi nel giorn. di Liouville, anno 1862, pagg. 253-255. Cauchy ritornava più tardi sul proprio teorema, considerando anche il caso di variabilità complessa (*Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d' une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données*. Comptes Rendus, tom. 36).

dove τ esprime una costante, col solo divario di riferire alla quantità $z-\tau$ ciò che per le serie (1) si riferirà a z.

Teorema. *Se A è quantità reale e positiva per la quale nessuno dei termini*

(3) $\quad \mathrm{mod}\, a_0 \quad , \quad \mathrm{mod}\, a_1 . A \quad , \quad \mathrm{mod}\, a_2 . A^2 \;, \quad \ldots$

riesce infinito, la serie (1) è convergente per tutti i valori di z con modulo minore di A.

Infatti se sia $\mathrm{mod}\, z = r < A$, la serie

$$1 + \frac{r}{A} + \left(\frac{r}{A}\right)^2 + \ldots$$

è convergente, e, moltiplicandone i termini ordinatamente pei numeri (3), tutti finiti, si avrà ancora una serie convergente

$$\mathrm{mod}\, a_0 + \mathrm{mod}\, a_1 . r + \mathrm{mod}\, a_2 . r^2 + \ldots$$

Dunque per ogni valore di z a modulo minore di A la serie dei moduli dei termini della serie (1) è convergente, e però convergente anche la (1).

Sia ora A il massimo modulo di z pel quale i moduli dei termini della serie (1) rimangono ancora tutti finiti, e descrivasi col centro in 0 e col raggio A un cerchio. Pei punti z giacenti entro questo cerchio si ha $\mathrm{mod}\, z < A$, e però la serie (1) è convergente. Pei punti z giacenti fuori si ha $\mathrm{mod} z > A$, e però la serie (1), siccome formata da termini i cui moduli non rimangono tutti finiti, è divergente. Per queste proprietà siffatto cerchio si chiama *cerchio di convergenza* della serie (1). Sulla circonferenza di esso la serie può essere ancora dappertutto convergente, ovvero in certi punti convergente ed in altri indeterminata o divergente. Per la serie (2) il cerchio di convergenza ha il centro nel punto τ.

La serie

$$z + \frac{z^3}{3^2} + \frac{z^5}{5^2} + \frac{z^7}{7^2} + \ldots$$

è convergente nell'interno ed in ogni punto del contorno del cerchio di raggio 1.

La serie

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$$

è pure convergente entro il cerchio di raggio 1. Ma sulla circonferenza v' è il punto $z = -1$ in cui la serie è divergente. In qualunque modo, del resto, z dall'interno del cerchio tenda al punto -1, il modulo della somma della serie tende all' infinito.

Può accadere che, tendendo z dal centro alla circonferenza del cerchio di convergenza, la somma della serie tenda ad un valore finito, mentre la serie nella circonferenza riesca indeterminata. Abbiasi, per esempio, la serie

$$1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

che converge entro il cerchio di raggio 1 ed ha per somma $\frac{1}{1-z}$. Per maggior semplicità s' imagini che z tenda alla circonferenza percorrendo un raggio; il modulo di z, cioè r, tenderà all' unità, mentre ω rimarrà costante. Se il raggio non sia nella direzione positiva dell' asse reale, cioè se non sia $\omega = 0$, la somma della serie tenderà al valor finito

$$\frac{1}{1 - e^{\omega i}},$$

e tuttavia per $z = e^{\omega i}$ la serie è indeterminata.

Il raggio del cerchio di convergenza può essere nullo, cioè dire la serie non essere mai convergente, se non per $z = 0$. Ne è esempio la

$$1 + 1.z + 1.2.z^2 + 1.2.3.z^3 + \dots$$

E può essere, per lo contrario, infinito. La serie sarebbe allora convergente per qualunque valor finito di z. Ne è esempio la serie esponenziale.

Pel teorema del §. precedente, *la somma della serie* (1), *entro il cerchio di convergenza, è funzione continua e finita di z; e la sua derivata può esprimersi con la serie*

$$a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots,$$

a cui spetta lo stesso cerchio di convergenza della prima (*).

§. **51**. Per una serie progrediente secondo le potenze intere e negative di z

(1) $$b_0 + \frac{b_1}{z} + \frac{b_2}{z^2} + \ldots,$$

la quale riducesi alla forma

$$b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots,$$

mediante la sostituzione $\zeta = \frac{1}{z}$, si riconosce che essa sarà convergente e la sua somma funzione continua e finita di z per tutti i valori di z rappresentati da punti situati fuori del cerchio di raggio $\frac{1}{B}$, essendo B il raggio di convergenza della serie

$$b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \ldots;$$

e che la derivata di detta somma potrà esprimersi con la serie

$$-\frac{b_1}{z^2} - \frac{2b_2}{z^3} - \ldots$$

convergente nella stessa estensione della (1).

§. **52**. Consideriamo le serie costituite da un sistema di quantità come il (3) §. 42. Pur tenendo fermo, come per le serie che procedono in un solo senso, che nella espressione o somma finita i termini debbano entrare, tanto nell' un senso quanto nell' altro, secondo l' ordine stesso con cui succedonsi i loro indici a cominciare dall' indice 0, si ha tuttavia una nuova arbitrarietà da regolare, e cioè come debba crescere il numero m' dei termini a sinistra di Q_0 in confronto del numero m dei termini a destra, ossia con qual legge sia da concepirsi che crescano insieme all' infinito i numeri m, m'

(*) Per le serie (1) in particolare, la proprietà che entro il cerchio di convergenza esse sono continue, messa in rilievo da Abel, può anche dedursi con molta semplicità da un' osservazione fatta per la prima volta esplicitamente dal sig. Duhamel (Vedi Bertrand *Traité de calcul diff.*, pag. 271).

nella espressione

$$\sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} Q_\mu .$$

La legge potrebbe lasciarsi indeterminata solo quando non avesse alcuna influenza sul valore della serie; il che avverrebbe qualora le serie

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots$$
$$Q_{-1} + Q_{-2} + Q_{-3} + \dots ,$$

fossero, ciascuna separatamente, convergenti. Fissata la legge, la serie

(1) $$\dots + Q_{-2} + Q_{-1} + Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

potrebbe riguardarsi ancora come della forma delle dianze considerate, prendendo qual termine generale (m esimo) il gruppo

(2) $$Q_m + Q_{-\varphi(m-1)+1} + Q_{-\varphi(m-1)+2} + \dots + Q_{-\varphi(m)} ,$$

supposto $m' = \varphi(m)$. Nel caso il più semplice, cioè di $m'=m$, il gruppo riducesi a $Q_m + Q_{-m}$. Le quantità $Q_{\pm m}$, invece di decrescere, potrebbero anche andar crescendo al crescere di m, e tuttavia la serie (1) per certe leggi di formazione riuscire convergente. Imperocchè per una data legge la convergenza dipende non dai valori delle singole quantità Q, si bene dai valori dei gruppi (2) prescritti dalla legge. Ma passiamo a considerare alcune classi di casi particolari delle serie in discorso.

§. 53. Una prima classe si ha supponendo $Q_{\pm m} = A_{\pm m} z^m$, cioè prendendo una serie progrediente nell' un senso secondo le potenze intere positive e nell' altro secondo le potenze intere negative di una variabile.

Sieno A e A' i raggi di convergenza delle serie

$$a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$$
$$a_{-1} z + a_{-2} z^2 + a_{-3} z^3 + \dots$$

La serie

$$a_{-1} z^{-1} + a_{-2} z^{-2} + a_{-3} z^{-3} + \dots$$

convergerà per tutti i punti z situati fuori del cerchio di raggio

$$\frac{1}{A'} \,.$$

E però, se sarà

$$\frac{1}{A'} < A \,,$$

la serie

$$\ldots + a_{-2}z^{-2} + a_{-1}z^{-1} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots,$$

convergerà entro la corona circolare contornata dalle circonferenze di raggi

$$\frac{1}{A'} \quad \text{e} \quad A \,,$$

anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, e la somma sua sarà ivi funzione continua e finita, la cui derivata potrà esprimersi con

$$\ldots - \frac{2a_{-2}}{z^3} - \frac{a_{-1}}{z^2} + a_1 + 2a_2 z + \ldots \,.$$

Per qualunque punto z situato fuori della corona la serie convergerebbe nell'un senso ma divergerebbe nell'altro, perchè i moduli dei termini andrebbero crescendo all'infinito; e quindi divergerebbe qualunque fosse la legge del simultaneo crescere di m e m'.

Per la serie, ad esempio,

$$\ldots + \frac{1}{3^2 z^2} + \frac{1}{3z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \ldots$$

la corona è determinata dalle circonferenze di raggi $\frac{1}{3}$ e 2.

Per quest'altra

$$\ldots + \frac{z^{-2}}{1.2} + \frac{z^{-1}}{1} + 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \ldots$$

la corona è determinata dalle circonferenze di raggi ∞ e $\frac{1}{\infty}$, cioè dire la serie possiede le proprietà su enunciate per tutti i valori di z, tranne 0 e ∞.

Per la serie

$$\frac{\alpha^2}{(z-\tau)^2}+\frac{\alpha}{z-\tau}+1+\frac{z-\tau}{2\,\alpha}+\frac{(z-\tau)^2}{2^2\,\alpha^2}+$$

la corona vien determinata dalle circonferenze descritte col centro in τ e coi raggi mod α e 2 mod α.

§. 54. Come seconda classe prendiamo a considerare quelle serie colle quali si può attuare la periodicità in maniera che la medesima rimanga affatto evidente.

Una quantità avente dipendenza periodica da un' altra z può trovarsi espressa sotto tal forma che non lasci niente affatto trasparire l' importantissimo carattere della periodicità. Questo è quanto avviene, per esempio, delle funzioni e^z, sen z, cos z espresse mediante le serie

$$1+\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\,.\,2}+\ldots$$

$$z-\frac{z^3}{1\,.\,2\,.\,3}+\frac{z^5}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5}-\ldots$$

$$1-\frac{z^2}{1\,.\,2}+\frac{z^4}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}-\ldots\ .$$

Ma s' imagini invece una quantità espressa mediante una serie convergente della forma

(1) $\ldots+Q(z+2a)+Q(z+a)+Q(z)+Q(z-a)+Q(z-2a)+\ldots\ .$

Siccome, cambiando z in $z+a$, ogni termine non fa che prendere il valore del termine che gli sta a sinistra, così, se, allontanandosi infinitamente da $Q(z)$, tanto a destra che a sinistra, i termini divengano infinitamente piccoli, potrà dirsi evidente che la quantità o somma della serie possieda il periodo a. Ed invero, essendo

$$\sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} Q\,(z-\mu a)$$

la somma finita dalla quale, col crescere di m e m', scaturisca la serie, se al posto di ciascun termine mettesi quello che

gli sta a sinistra nella (1), manifestamente la somma finita non si altera se non che della differenza

$$(2) \qquad Q(z+m'a+a)-Q(z-ma) \quad ,$$

e quindi il suo limite, ossia la serie, non potrà alterarsi se non che del limite di questa differenza, il quale, pel supposto, sarà zero.

Se questa serie non sarà convergente nell'uno e nell'altro senso anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, potrà avvenire che alterando l'ordine dei medesimi si ottenga una serie ancora convergente e non più periodica. Se però si rispetta l'ordine dei termini indicato in (1) e si muta sol-tanto la legge del simultaneo crescere di m e m', potrà accadere che per certe leggi la serie non riesca convergente; ma, ogniqualvolta riuscirà convergente e i termini infinitamente discosti da $Q(z)$ in entrambi i sensi saranno infinitamente piccoli, essa sarà anche periodica.

Fra i casi, nei quali i termini non vanno impiccolendo indefinitamente, giova notarne uno, di cui incontreremo in seguito parecchi esempi. E cioè quello nel quale la differenza (2) tenda, al crescere di m e m', verso una costante c. Allora lo spostamento dei termini, che equivale al cambiare z in $z+a$, porterà l'incremento c nel valore della serie; e ripetendo lo spostamento altre $s-1$ volte (per lo che, in complesso, si produce lo stesso effetto che cambiando la z in $z+sa$ nei termini quali in origine sono dati) si produrrà l'incremento sc nel valore della serie. Se la serie esprimerà una funzione $f(z)$, questa funzione non sarà periodica, ma avrà periodica la derivata; poichè dalla

$$f(z+sa)=f(z)+sc$$

risulta

$$f'(z+sa)=f'(z)$$

La dipendenza dei termini da uno fra essi quale vedesi nella (1) può dirsi la più semplice, ma non è la sola colla quale possa risultare evidente la periodicità della somma. Es-

sendo h un numero intero ed H una delle radici $h$esime dell' unità, la periodicità sarebbe ancora evidente nella serie i cui termini dipendessero da $Q_0 = Q(z)$ nel seguente modo

$$(3) \qquad Q_\mu = \text{H}^\mu \, Q\left(z - \frac{\mu}{h} a\right) ,$$

che per $h=1$ coinciderebbe col modo (1). Essendo $\text{H}^{\mu-h} = \text{H}^\mu$, dalla (3) risulta

$$Q_{\mu-h} = \text{H}^\mu \, Q\left(z + a - \frac{\mu}{h} a\right) .$$

E però cambiando z in $z+a$ nella serie dei termini (3) si [illegible] scorrere ogni termine di h posti verso sinistra. Quindi, se la quantità

$$Q(z+[m'+h]a) + Q(z+[m'+h-1]a) + \ldots + Q(z+[m'+1]a)$$
$$- Q(z-[m-h+1]a) - Q(z-[m-h+2]a) - \ldots - Q(z-m\,.\,a),$$

che adesso tiene il posto della (2), avrà per limite 0, la somma della serie ammetterà manifestamente il periodo a.

È, del resto, affatto ovvio che, considerando i termini come aggruppati ad h ad h, una serie formata coi termini (3) rientra nella forma (1).

§. 53. Ritornando a questa, supponiamovi ormai qualche forma particolare per $Q(z)$. La forma che da se stessa si offre per la prima è quella delle funzioni algebriche razionali. Però, qualunque funzione algebrica razionale si decompone in un numero limitato di parti elementari della forma

$$B z^g \; , \quad \frac{C}{(z-c)^g} \; ,$$

essendo g intero positivo. Quindi, tralasciando le parti intere, che non darebbero serie convergenti, e prendendo le parti fratte, e precisamente il tipo ora ricordato di ogni singola fra esse, facciamo

$$Q(z) = \frac{C}{(z-c)^g} \; ,$$

ovvero, scrivendo soltanto z invece di $z-c$, facciamo

$$Q(z)=\frac{1}{z^g}\quad .$$

Avremo la serie di frazioni razionali

$$(1)\ ..+\frac{1}{(z+2a)^g}+\frac{1}{(z+a)^g}+\frac{1}{z^g}+\frac{1}{(z-a)^g}+\frac{1}{(z-2a)^g}+..\ .$$

Sebbene assai particolare in confronto della (1) del §. precedente, questa serie comprende tuttavia in se ancora una infinità di serie ottenibili coll' attribuire valori particolari a g. Ora cominceremo a dimostrare che tutte le serie (1) corrispondenti a valori di g maggiori di 1 sono convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispettivi. Però, invece delle sole (1), abbracceremo nella dimostrazione un' assai più larga classe di serie.

Teorema. *La serie*

$$(2)\qquad \Sigma\frac{1}{\varpi^g}\quad ,$$

dove le ϖ *costituiscano un sistema semplicemente infinito di quantità, aventi tra loro differenze dei moduli delle quali si possa assegnare un limite inferiore e più grande di zero* (*), *è convergente, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, quando sia* $g>1$.

Consideriamo, infatti, a dirittura, la serie dei moduli

$$(3)\qquad \Sigma\frac{1}{(\mathrm{mod}\ \varpi)^g}\quad ,$$

per dimostrare la convergenza della quale è lecito supporre qualsivoglia particolare ordinamento dei termini. Imaginiamo i termini ordinati per gruppi come lo furono nel §. 13 i punti ϖ per corone circolari, determinate da circonferenze descritte con raggi multipli di una lunghezza fissa Δ; e trascuriamo, se ve ne fossero, quei termini che corrispondessero a quantità ϖ di modulo minore di Δ. Conservando anche per ι il significato

(*) Vedi il §. 13. Nel cominciamento di questo §. è anche appunto notato, come caso particolare, quello corrispondente alla serie (1), cioè di $\varpi=z+ma$.

datole nel §. 13, la somma dei termini del gruppo *m esimo* nella serie (3) avrà un valore non più grande di

$$\iota \frac{1}{(m\Delta)^g} \quad ,$$

e quindi la somma dei primi m gruppi un valore non più grande di

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{\iota}{(\mu\Delta)^g} = \frac{\iota}{\Delta^g} \sum_{\mu=1}^{\mu=m} \frac{1}{\mu^g} \,.$$

Ma la serie $\sum \frac{1}{\mu^g}$, come si sa, è convergente per $g>1$; dunque ecc. *Come dovevasi dimostrare.*

Per $g>1$ la serie (1) esprime dunque una quantità dipendente da z e dotata del periodo a. Ora riflettiamo altresì che questa quantità è funzione di z e continua per qualunque valore finito di questa variabile. Per valori di z che non sieno multipli di a, quest' asserto non è che un caso particolare del teorema del §. 49; la funzione è continua insieme e finita. A persuaderci poi che anche per un valore ma di z, multiplo qualsivoglia di a, la funzione rimane continua, divenendo però infinita, basta che togliamo per un momento dalla serie il termine $\frac{1}{(z-ma)^g}$. Senza di questo termine la somma delle serie esprime una funzione $\varphi(z)$ continua e finita per $z=ma$. Aggiungendo adesso a $\varphi(z)$ il termine soppresso, che è funzione di z continua ma infinita per $z=ma$, la somma

$$\varphi(z)+\frac{1}{(z-ma)^g} \quad ,$$

cioè dire la quantità definita dalla serie (1), dà ancora una funzione continua di z, che però per $z=ma$ diviene infinita come la frazione razionale $\frac{1}{(z-ma)^g}$.

Per completare la questione della convergenza delle serie ottenibili dalla (1) col fare $g = 1, 2, 3,$ ecc., resta da esaminarsi il caso di $g = 1$. Ponendo az invece di z, potremo considerare la serie sotto la forma

$$(1) \qquad \cdots + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} + \cdots \quad .$$

Questa serie non riesce convergente se riducansi i termini ai moduli rispettivi.

Supponendo che i numeri m, m' nella somma finita

$$\sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} \frac{1}{z-\mu}$$

crescano conservandosi sempre eguali, si ottiene una serie convergente che può anche scriversi come segue

$$\frac{1}{z} + 2z\left(\frac{1}{z^2-1^2} + \frac{1}{z^2-2^2} + \frac{1}{z^2-3^2} + \cdots\right)$$

e che si sa esprimere la funzione circolare $\pi\cot\pi z$.

Ma imaginiamo adesso che m' debba crescere con m a seconda di un' altra legge $m' = \varphi(m)$. Finchè m sia finito, si ha

$$(5) \qquad \sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} \frac{1}{z-\mu} = \sum_{1}^{m'} \frac{1}{z+\mu} + \frac{1}{z} + \sum_{1}^{m} \frac{1}{z-\mu} .$$

Ora, si ha identicamente

$$\sum_{1}^{m} \frac{1}{z-\mu} = \sum_{1}^{m}\left(\frac{1}{z-\mu} + \frac{1}{\mu}\right) - \sum_{1}^{m} \frac{1}{\mu}$$

$$= \sum_{1}^{m} \frac{z}{\mu z - \mu^2} - \sum_{1}^{m} \frac{1}{\mu} ,$$

$$\sum_{1}^{m'} \frac{1}{z+\mu} = \sum_{1}^{m'}\left(\frac{1}{z+\mu} - \frac{1}{\mu}\right) + \sum_{1}^{m'} \frac{1}{\mu}$$

$$= \sum_{1}^{m'} \frac{-z}{\mu z + \mu^2} + \sum_{1}^{m'} \frac{1}{\mu} .$$

Dunque, ponendo

$$\lambda_m = \sum_1^{m'} \frac{1}{\mu} - \sum_1^{m} \frac{1}{\mu} ,$$

si avrà

$$\sum_{-m'}^{m} \frac{1}{z-\mu} = \sum_1^{m} \frac{z}{\mu z - \mu^2} - \sum_1^{m'} \frac{z}{\mu z + \mu^2} + \lambda_m \quad .$$

Le serie che scaturiscono dalle due prime somme del secondo membro sono entrambe separatamente convergenti ed hanno quindi valori perfettamente determinati, sui quali la legge $m' = \varphi(m)$ non ha influenza alcuna, e la cui differenza è dunque $\pi \cot \pi z$. Per avere il limite della somma (5) basta pertanto trovare quello di λ_m. Separatamente, ciascuna delle due somme costituenti λ_m cresce all' infinito con m' ed m, sì che λ_m si presenterebbe come la differenza indeterminata di due infiniti, e si tratta di ottenerne il valore quando m' ed m hanno da crescere simultaneamente secondo la legge prescritta. A tal fine ricordiamo che la quantità

$$C_m = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} - lm ,$$

dove lm significa il logaritmo naturale e reale di m, tende, col crescere di m all' infinito, ad *un* limite finito C, del cui valore $(0,57721\ldots)$ non importa qui tenere parola. E però dalle eguaglianze

$$\sum_1^{m} \frac{1}{\mu} = C_m + lm \ , \quad \sum_1^{m'} \frac{1}{\mu} = C_{m'} + lm'$$

si avrà

$$\lambda_m = C_{m'} - C_m + l\frac{m'}{m} .$$

Siccome $C_{m'} - C_m$ tende al limite $C - C = 0$, λ_m tenderà allo stesso limite di $l\frac{m'}{m}$. E pertanto egli è solamente il valore del quo-

ziente $\frac{m'}{m}$ all' infinito l' elemento da cui dipende la convergenza ed il valore della serie (4). Per la convergenza il quoziente non deve tendere nè a 0 nè a ∞. Se tenda a j, o, ciò ch' è lo stesso, se suppongasi sin dal principio $m'=\varphi(m)=jm$: si avrà come valore della serie (4) la quantità

$$\pi\cot\pi z + lj\ .$$

Conformemente ad una già fatta osservazione generale, questa quantità è pur sempre funzione periodica.

Quanto alla serie prima che z fosse mutata in az, la somma sarà

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{z-\mu a}=\frac{\pi}{a}\cot\frac{\pi z}{a}+\frac{1}{a}lj\ .$$

Le somme delle serie (1), pei valori 2, 3, 4, ... di g, si riducono tutte parimenti a funzioni circolari o, ciò ch' è dire lo stesso, alla funzione e^z. Supposto per semplicità $a=1$, si trova per g pari $(=2g)$ la formola

$$(6)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-\mu)^{2g}}=\pi^{2g}\left(\frac{c_1}{\operatorname{sen}^2\pi z}+\frac{c_2}{\operatorname{sen}^4\pi z}+\ldots+\frac{c_g}{\operatorname{sen}^{2g}\pi z}\right)$$

e per g dispari

$$(7)\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(z-\mu)^{2g+1}}=\pi^{2g+1}\left(\frac{c'\cos\pi z}{\operatorname{sen}^3\pi z}+\frac{c''\cos\pi z}{\operatorname{sen}^5\pi z}+\ldots+\frac{c^{(g)}\cos\pi z}{\operatorname{sen}^{2g+1}\pi z}\right),$$

essendo $c_1, c_2, \ldots, c_g$; $c', c'', \ldots, c^{(g)}$ costanti delle quali i valori non occorre a noi di precisare.

§. **56.** Le serie della forma

$$(1)\ \ldots+Q(z+2a)+Q(z+a)+Q(z)+Q(z-a)+Q(z-2a)+\ldots$$

non somministrano soltanto la periodicità semplice, ma permettono anche di attuare facilmente la periodicità doppia. Basta perciò prendere $Q(z)$ già periodica, ed in modo del resto che la serie riesca convergente.

In ordine di semplicità si presenterebbe come prima fun-

zione da prendersi per $Q(z)$ la e^z, ovvero, volendo un periodo dato qualunque b, la

$$e^{\frac{2\pi i}{b}z}.$$

Ma, essendo

$$e^{\frac{2\pi i}{b}(z+\mu a)}=e^{\frac{2\pi i}{b}z}\left[e^{\frac{2\pi i}{b}a}\right]^{\mu},$$

la serie (1) diverrebbe il prodotto della presa funzione semplicemente periodica per una serie che non conterrebbe la z, nè riuscirebbe convergente, comunque si volesse regolare il simultaneo crescere di m e m', poichè i moduli dei termini sarebbero in progressione geometrica crescente nell'un senso e decrescente nell' altro.

Prendendo invece

$$Q(z)=\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{b}z}$$

si ottiene la serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{2\pi}{b}(z-\mu a)},$$

che, ove a e b non abbiano tra loro rapporto reale, converge in entrambi i sensi, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi; come si può vedere dimostrato nel §. 58 per un caso più generale. Questa serie esprimerà dunque una funzione continua per qualunque valor finito di z, dotata dei periodi a e b, ed infinita per tutti e soli i valori di z dati da

$$\frac{2\pi}{b}(z-\mu a)=\nu\pi$$

ossia da

$$z = \mu a + \frac{\nu}{2} b,$$

essendo ν, al pari di μ, numero intero qualsiasi (*).

§. 57. Nella serie precedente uno soltanto dei due periodi è dovuto alla forma infinita della espressione. Volendo ottenere per virtù della forma infinita non uno ma due periodi, cioè dire, volendo attuare la doppia periodicità nelle serie, senza prendere termini che già sieno dotati di un periodo, bisogna ricorrere alle serie doppie. A tal fine la serie (1) §. 54 suggerisce tosto di formare i termini della serie doppia con un' unica funzione $Q(z)$, stabilendo

$$(1) \qquad Q_{\mu,\nu} = Q(z - \mu a - \nu b)$$

cioè dire, prendendo il sistema di quantità

$$\begin{array}{lllllll}
. & . & . & . & . & . & . \\
. & Q(z+2a+2b) & Q(z+a+2b) & Q(z+2b) & Q(z-a+2b) & Q(z-2a+2b) & . \\
. & Q(z+2a+b) & Q(z+a+b) & Q(z+b) & Q(z-a+b) & Q(z-2a+b) & . \\
. & Q(z+2a) & Q(z+a) & Q(z) & Q(z-a) & Q(z-2a) & . \\
. & Q(z+2a-b) & Q(z+a-b) & Q(z-b) & Q(z-a-b) & Q(z-2a-b) & . \\
. & Q(z+2a-2b) & Q(z+a-2b) & Q(z-2b) & Q(z-a-2b) & Q(z-2a-2b) & . \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

In siffatto sistema è manifesto che cambiando z in $z+a$ si produce lo stesso effetto come se ogni termine prendesse il posto del termine successivo nella stessa linea verso sinistra, e cambiando z in $z+b$ lo stesso effetto come se ogni termine prendesse il posto del successivo nella stessa colonna verso l' alto. Quindi, se la serie sarà convergente e non si altererà di valore nè per l' uno nè per l' altro dei detti spostamenti, essa ammetterà i due periodi a e b.

Analogamente al già osservato nel §. 54, la dipendenza

(*) È anche questa una delle vie per giungere affatto naturalmente alle funzioni ellittiche. Secondo le notazioni jacobiane, ritenendo $a = 2iK'$ e $b = 4K$, si riconoscerà a suo tempo che la funzione qui ottenuta è $\dfrac{2K}{\pi \operatorname{sen} \operatorname{am} z}$.

dei termini da uno fra essi indicata dalla (1) può dirsi la più semplice, ma non è la sola colla quale si possa mettere in evidenza la doppia periodicità. Così, per esempio, può anche servire a questo scopo la

(2) $$Q_{\mu,\nu} = (-1)^{\nu}\, Q\left(z - \mu a - \frac{\nu}{2} b\right).$$

Con questa, cambiando z in $z+b$ non si produce più l'effetto dianzi notato, cioè lo stesso effetto che cambiando nel secondo membro dell'equazione definiente $Q_{\mu,\nu}$ il numero ν in $\nu-1$, ma lo stesso effetto che cambiando ν in $\nu-2$, cambiamento che non altera il fattore $(-1)^{\nu}$. Se il valore della serie non subirà alcuna alterazione per questo progredire d'ogni termine di due posti verso l'alto, e se non ne subirà d'altronde al cambiarsi di z in $z+a$, la (2) avrà somministrato una serie doppiamente periodica.

§. 58. Contempliamo anche nel campo delle serie doppie i casi particolari forniti dal supporre

$$Q(z) = \frac{1}{z^{g}}.$$

Adottando la (1) del §. precedente, avremo da considerare le serie

(1) $$\sum_{\mu,\nu} \frac{1}{(z - \mu a - \nu b)^{g}}$$

corrispondenti ai diversi valori di g. Ora possiamo stabilire un teorema analogo a quello del §. 55, che, applicato alla serie precedente, dirà ch'essa converge, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, quando sia $g>2$.

Teorema. *La serie*

(2) $$\Sigma \frac{1}{\varpi^{g}},$$

ove le ϖ *costituiscano un sistema doppiamente infinito di quantità,* §. 13, *aventi tra loro differenze delle quali i moduli sieno tutti*

maggiori di un numero fisso $d > 0$, converge, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, quando sia $g > 2$.

Consideriamo la serie dei moduli. Per ciò che si disse nel §. 13 il modulo della quantità ϖ racchiusa nel quadrato $(m+1, n+1)$ sarà della forma

$$[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2]^{\frac{1}{2}}\frac{d}{\sqrt{2}},$$

essendo ε ed η ($=1-\varepsilon, =1-\eta$ del §. suddetto) quantità reali comprese tra 0 e 1. E però la serie dei moduli potrà rappresentarsi colla scrittura

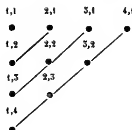
$$(3) \qquad \sum_{m,n} \frac{1}{\left[(m+\varepsilon)^2+(n+\eta)^2\right]^{\frac{g}{2}} \dfrac{d^g}{2^{\frac{g}{2}}}},$$

dove la somma deve estendersi a un numero infinito di coppie diverse di valori degli interi m e n, ed ε e η, rimanendo pur sempre fra i detti limiti, possono variare da un termine all'altro. La serie (3) è di certo convergente se lo sia la

$$(4) \qquad \sum_{m,n} \frac{1}{\left[m^2+n^2\right]^{\frac{g}{2}}},$$

i cui termini, astrazion fatta dal fattor costante $\frac{2^{\frac{g}{2}}}{d^g}$, sono rispettivamente maggiori dei termini della (3). Supponiamo la (4) composta soltanto di termini i cui indici m e n sieno positivi, ma ammettiamovi, del resto, tutte le possibili coppie di numeri interi positivi per (m, n). Se anche si presentassero per (m, n) tutte affatto le possibili coppie di numeri interi positivi e negativi, la serie non riuscirebbe che il quadruplo della supposta.

Ora, imaginando i termini della (4) disposti nella solita maniera, cioè nelle rispettive posizioni qui sotto indicate dalle coppie degli indici



componiamo dei termini che sono in una stessa diagonale (pei quali cioè la somma $m+n$ ha uno stesso valore) un solo gruppo. Indicando con G_h il gruppo $h$esimo, avremo

$$\Sigma_{m,n} \frac{1}{[m^2+n^2]^{\frac{g}{2}}} = \Sigma_h\, G_h \quad ,$$

$$G_h = \frac{1}{[1^2+h^2]^{\frac{g}{2}}} + \frac{1}{[2^2+(h-1)^2]^{\frac{g}{2}}} + \ldots + \frac{1}{[h^2+1^2]^{\frac{g}{2}}} \quad .$$

Ora, riflettendo che per qualunque coppia (m,n) si ha

$$m^2+n^2 \geqq \tfrac{1}{2}(m+n)^2 \;,$$

si scorge essere

$$G_h < 2^{\frac{g}{2}} \left\{ \frac{1}{[1+h]^g} + \frac{1}{[2+h-1]^g} + \ldots + \frac{1}{[h+1]^g} \right\}$$

ossia

$$G_h < 2^{\frac{g}{2}} \frac{h}{[h+1]^g} < 2^{\frac{g}{2}} \frac{h}{h^g} = 2^{\frac{g}{2}} \frac{1}{h^{g-1}} \quad .$$

Ma, per $g-1>1$, la serie $\Sigma \frac{1}{h^{g-1}}$ è convergente; dunque lo è anche la $\Sigma\, G_h$, ecc. *C. D. D.*

Pertanto, attribuendo a g i valori $3, 4, 5 \ldots$, si otterranno dalla (1) altrettante serie, che, essendo convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, non subiranno alcuna

alterazione per quegli spostamenti che dicemmo equivalere al mutare z in $z+a$ o $z+b$. Ciascuna di queste serie esprimerà una funzione continua per qualunque valor finito di z, dotata dei periodi a e b, ed infinita per tutti e soli i valori di z dati dalla formola $z=\mu a+\nu b$.

A compiere la discussione della convergenza e periodicità delle serie comprese in (1) restano da esaminare i casi $g=1$, $g=2$. Per questi due casi non solo tace il teorema precedente, ma è anzi facile il ravvisare che la convergenza delle serie dei moduli non ha luogo. Però sonvi leggi di composizione di somme finite, da cui le serie si possano considerare provenienti, per le quali si verifica la convergenza. Dimostriamo anzitutto che esiste una di siffatte leggi, indi investigheremo quali effetti possano essere prodotti da alterazioni nell' ordine dei termini.

Ammettiamo che le due serie traggano origine dalle somme finite

$$(5)\qquad \sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{z-\mu a-\nu b}\;,\;\sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2}\;,$$

nelle quali si faccia crescere infinitamente prima m e poi n. Invece però di considerare soltanto queste due serie consideriamo ancora tutte quelle comprese nelle formole

$$(6)\qquad \sum\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^{2g+1}}\;,\quad \sum\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^{2g}}\;;$$

perchè la stessa dimostrazione può abbracciarle tutte senza complicarsi, e perchè nel tempo stesso si vede come tutte quante siffatte serie doppie riducansi ad una determinata classe di serie semplici.

Si ponga nelle eguaglianze (6), (7) del §. 55 $\dfrac{z-\nu b}{a}$ in luogo di z, e si moltiplichi la prima per $\dfrac{1}{a^{2g}}$, la seconda per $\dfrac{1}{a^{2g+1}}$; si otterrà:

$$(7)\ \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^{2g}}=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2g}\left\{\frac{c_1}{\operatorname{sen}^2\pi\frac{z-\nu b}{a}}+\ldots+\frac{c_g}{\operatorname{sen}^{2g}\pi\frac{z-\nu b}{a}}\right\}$$

$$(8)\ \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^{2g+1}}=\left(\frac{\pi}{a}\right)^{2g+1}\left\{\frac{c'\cos\pi\frac{z-\nu b}{a}}{\operatorname{sen}^3\pi\frac{z-\nu b}{a}}+\ldots+\frac{c^{(g)}\cos\pi\frac{z-\nu b}{a}}{\operatorname{sen}^{2g+1}\pi\frac{z-\nu b}{a}}\right\}.$$

Quest' ultima vale per $g>0$; per $g=0$ la

$$\lim_{m=\infty}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{z-\mu}=\pi\cot\pi z$$

somministra

$$(9)\qquad \sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{z-\mu a-\nu b}=\frac{\pi}{a}\cot\pi\frac{z-\nu b}{a}=\frac{\pi}{a}\,\frac{\cos\pi\frac{z-\nu b}{a}}{\operatorname{sen}\pi\frac{z-\nu b}{a}}\ .$$

E pertanto, ciascuna delle somme finite

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\ \sum_{\mu=-m}^{\mu=m}$$

formate coi termini delle serie indicate in (6) diviene, crescendo m all' infinito, un' aggregato di $2n+1$ (numero dei valori di ν da $-n$ a $+n$) serie convergenti, di ognuna delle quali le (7), (8), (9) forniscono la somma. Sostituendo alle serie queste loro somme e ponendo, per brevità,

$$\frac{\pi z}{a}=\zeta\quad,\quad\frac{\pi b}{a}=\beta\quad,$$

è chiaro che, per compiere la dimostrazione della convergenza, basta dimostrare essere convergenti le serie provenienti da somme finite della forma

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\frac{1}{\operatorname{sen}^{2g}(\zeta-\nu\beta)}\ ,\quad \sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\frac{\cos(\zeta-\nu\beta)}{\operatorname{sen}^{2g+1}(\zeta-\nu\beta)}\ ,\quad \sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\cot(\zeta-\nu\beta)\ .$$

E però dimostreremo che sono convergenti, anche riducendo i termini ai moduli rispettivi, le serie della forma

$$(10) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\cos^h(\zeta-\nu\beta)}{\operatorname{sen}^g(\zeta-\nu\beta)} \;, \quad \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{\operatorname{sen}^h(\zeta-\nu\beta)}{\cos^g(\zeta-\nu\beta)} \;,$$

ogni qualvolta il numero intero g superi l' intero h.

La serie

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} \cot(\zeta-\nu\beta)$$

ed, in generale, il caso $g=h$ richiede una speciale investigazione.

Venendo dunque alle due serie (10), basterà considerarne una sola; poichè, attesa l' arbitrarietà di ζ, esse non differiscono essenzialmente tra loro, trasformandosi l' una nell' altra col porre $\zeta+\frac{\pi}{2}$ in luogo di ζ. Prendendo, per fissar le idee, la prima, è subito dimostrato che la radice $n$esima del modulo del suo termine $n$esimo, tanto verso destra che verso sinistra, tende ad una quantità fissa più piccola di 1. Sostituendo al seno ed al coseno i loro valori espressi colla esponenziale, e tenendo ν invece di $\pm n$, il termine d' indice ν, cioè dire il termine $n$esimo verso destra o verso sinistra come si vuole, si troverà espresso dalla frazione

$$i^g \frac{\left[e^{i(\zeta-\nu\beta)}+e^{-i(\zeta-\nu\beta)}\right]^h}{\left[e^{i(\zeta-\nu\beta)}-e^{-i(\zeta-\nu\beta)}\right]^g} \;.$$

Crescendo n, i moduli delle due funzioni

$$e^{i(\zeta-\nu\beta)} \;,\; e^{-i(\zeta-\nu\beta)}$$

tendono l' uno a ∞, l' altro a 0. Infatti, designando con γ e δi le parti reale e immaginaria di β, si ha

$$e^{i(\zeta-\nu\beta)} = e^{i\zeta} \,.\, e^{-\nu\gamma i} \,.\, e^{\nu\delta}$$

$$e^{-i(\zeta-\nu\beta)} = e^{-i\zeta} \,.\, e^{\nu\gamma i} \,.\, e^{-\nu\delta} \;;$$

ma dei due fattori

$$e^{\pm i\zeta} \quad , \quad e^{\mp \nu\gamma i} = \cos\nu\gamma \mp i \operatorname{sen}\nu\gamma$$

l'uno non varia con ν e l'altro ha sempre per modulo l'unità; i moduli delle due funzioni variano dunque con n soltanto in virtù del terzo fattore, che nell'una va evidentemente a ∞ e nell'altra a 0.

Perciò, trascurando nel numeratore e nel denominatore della precedente frazione quella delle due funzioni che tende a 0, e trascurando inoltre i fattori provenienti da

$$e^{\pm i\zeta} \quad , \quad e^{\pm \nu\gamma i} \quad ,$$

dei quali le radici $n$esime dei moduli tendono o sono eguali all'unità, si otterrà, come modulo del termine d'indice ν, la espressione

$$\frac{\left[e^{\pm\nu\delta}\right]^h}{\left[e^{\pm\nu\delta}\right]^g} = e^{\pm\nu\delta(h-g)} \quad ,$$

in cui dei due segni premessi a $\nu\delta$ s'intende preso quello pel quale $\pm\nu\delta$ riesce positivo. Dividendo l'esponente $\pm\nu\delta(h-g)$ per l'intero positivo n si otterrà, come quantità a cui tende la radice $n$esima del modulo del termine $n$esimo sì a destra che a sinistra, la

$$e^{(h-g)\bmod\delta} \quad ,$$

che per $h<g$ è più piccola dell'unità. C. D. D.

Questa dimostrazione mette nel tempo stesso in chiaro: che per $h>g$ il modulo del termine d'indice ν crescerà infinitamente con n, onde la serie in ciascuno dei due sensi necessariamente divergerà; e che per $h=g$ il modulo suddetto tenderà all'unità, onde la serie potrà riuscire convergente per certe leggi di formazione della somma finita, ma dovrà anche riuscire divergente per altre leggi.

Concentriamo l' attenzione su quest' ultimo caso, cioè sulle serie

$$(11) \qquad \sum \frac{\cos^g(\zeta-\nu\beta)}{\text{sen}^g(\zeta-\nu\beta)} .$$

Sostituendo a $\cos^g(\zeta-\nu\beta)$ l' una o l' altra delle espressioni

$$[1-\text{sen}^2(\zeta-\nu\beta)]^{\frac{g}{2}} \quad , \quad [1-\text{sen}^2(\zeta-\nu\beta)]^{\frac{g-1}{2}}\cos(\zeta-\nu\beta)$$

secondochè g sia pari o impari, sviluppando la potenza del binomio e dividendo per $\text{sen}^g(\zeta-\nu\beta)$ ogni singolo termine, la frazione

$$\frac{\cos^g(\zeta-\nu\beta)}{\text{sen}^g(\zeta-\nu\beta)}$$

si troverà decomposta in un certo numero di parti, le quali, ad eccezione di una sola, saranno comprese nella formola già contemplata

$$\frac{\cos^h(\zeta-\nu\beta)}{\text{sen}^g(\zeta-\nu\beta)}, \qquad h<g .$$

Perciò resterà da esaminare soltanto la convergenza della serie avente per termine generale la parte che fa eccezione. Ora questa parte è

$$1 \quad \text{ovvero} \quad \frac{\cos(\zeta-\nu\beta)}{\text{sen}(\zeta-\nu\beta)}$$

secondochè g sia pari ovvero impari.

Nel caso pertanto di g pari, la serie (11), trovandosi decomposta in serie che convergono anche riducendone i termini ai moduli rispettivi e nella serie

$$1+1+1+1+\ldots,$$

è divergente.

Nel caso di g impari devesi considerare la serie

$$\sum \frac{\cos(\zeta-\nu\beta)}{\text{sen}(\zeta-\nu\beta)} .$$

Questa serie, come si è osservato, non converge riducendone

i termini ai moduli rispettivi; i suoi termini $n$esimi Q_n e Q_{-n}, col crescere infinitamente di n, non tendono a zero, ma a due limiti diversi da zero e tra loro contrari.

Stabilendo che il numero dei termini a sinistra (di $Q_0 = \cot\zeta$) debba conservarsi sempre eguale al numero dei termini a destra, la serie riesce convergente. Ed invero, fatta astrazione dal termine Q_0, si ottiene in tal caso la serie

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} [\cot(\zeta - n\beta) + \cot(\zeta + n\beta)] ,$$

che, in virtù della relazione

$$\cot(\zeta - n\beta) + \cot(\zeta + n\beta) = \frac{\operatorname{sen} 2\zeta}{\operatorname{sen}(\zeta - n\beta)\operatorname{sen}(\zeta + n\beta)},$$

prende l' aspetto

$$(12) \qquad \operatorname{sen} 2\zeta \sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{sen}(\zeta - n\beta)\operatorname{sen}(\zeta + n\beta)} .$$

Ora, essendo, per quanto si è dimostrato, convergenti le due serie

$$\sum_1^\infty \operatorname{mod} \frac{1}{\operatorname{sen}(\zeta - n\beta)} \quad , \quad \sum_1^\infty \operatorname{mod} \frac{1}{\operatorname{sen}(\zeta + n\beta)} ,$$

lo è a maggior ragione quest' altra

$$\sum_1^\infty \operatorname{mod} \frac{1}{\operatorname{sen}(\zeta - n\beta)} \cdot \operatorname{mod} \frac{1}{\operatorname{sen}(\zeta + n\beta)}$$

i cui termini sono ordinatamente minori dei termini della serie che si avrebbe moltiplicando le prime due. La serie (12), dunque, è convergente anche riducendone i termini ai moduli rispettivi.

Così resta dimostrata la convergenza delle serie

$$\sum \frac{1}{z - \mu a - \nu b} \quad , \quad \sum \frac{1}{(z - \mu a - \nu b)^2}$$

ove s' intendano provenienti dalle (5) col far crescere infinita-

mente prima m e poi n. Possiamo poi anche riflettere che la convergenza della seconda di queste serie non cesserebbe d'aver luogo, nè il valor suo subirebbe alcuna alterazione, se invece della (5) si prendesse come somma finita la seguente

$$\sum_{\nu=-n'}^{\nu=n} \sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2},$$

qualunque fossero le leggi con cui dovessero andare all'infinito m' con m ed n' con n.

Noteremo altresì di passaggio che le funzioni $f_1(z)$ e $f_2(z)$, somme delle dette due serie, sono l'una dispari e l'altra pari. Infatti le somme finite (5) non si alterano cambiando nella espressione del termine generale μ e ν in $-\mu$ e $-\nu$, e quindi anche i loro limiti rimangono invariati, cioè si ha

$$f_1(z)=\sum\frac{1}{z-\mu a-\nu b}= \sum\frac{1}{z+\mu a+\nu b},$$

$$f_2(z)=\sum\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2}= \sum\frac{1}{(z+\mu a+\nu b)^2};$$

e però si avrà anche

$$f_1(-z)=\sum\frac{1}{-z-\mu a-\nu b}=-\sum\frac{1}{z+\mu a+\nu b}=-f_1(z)$$

$$f_2(-z)=\sum\frac{1}{(-z-\mu a-\nu b)^2}= \sum\frac{1}{(z+\mu a+\nu b)^2}= f_2(z).$$

Per $g>2$ è forse superfluo l'avvertire che la serie (1) rappresenta una funzione dispari o pari secondochè sia dispari o pari g.

§. 59. Accertata la esistenza di un significato preciso per le serie

(1) $$\sum\frac{1}{z-\mu a-\nu b},$$

(2) $$\sum\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2},$$

passiamo ad investigare quali alterazioni possa subire cotesto significato o valore alterando l'ordine dei termini. Indichiamo, per brevità, col segno ∇ la variazione di valore che una serie, la cui somma dipenda dall'ordine dei termini, subisce allorchè quest'ordine viene alterato. Circa questo segno possiamo tosto riflettere, che si potrà togliere od aggiungere ad una somma, dinanzi a cui esso si trovi, un numero finito qualsivoglia di termini; poichè la somma di un numero finito di termini non può subire alcuna variazione per qualunque modo si alteri l'ordine dei termini. Similmente, si potrà anche togliere od aggiungere un gruppo composto d'una infinità di termini, se questo gruppo costituisca una serie che rimanga convergente anche riducendone i termini ai moduli rispettivi.

I valori di

$$(3) \qquad \nabla \Sigma \frac{1}{z-\mu a-\nu b} \; ,$$

$$(4) \qquad \nabla \Sigma \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} \; ,$$

per ogni fissata alterazione nell'ordine dei termini, dipenderanno da a, b, z.

La natura della dipendenza da z è facile a determinarsi, qualunqne sia del resto l'alterazione. Infatti, cominciamo a riflettere che nella determinazione di essi valori si può tralasciare in entrambe le serie (1) e (2) quei termini pei quali non sia

$$(5) \qquad \text{mod}\,(\mu a+\nu b) > \text{mod}\, z \; ,$$

il cui numero, finchè z è quantità finita, è finito. Tolti questi termini, ognuno degli altri si può sviluppare secondo le potenze di z in serie convergente, come sta espresso nelle

$$\frac{1}{z-\mu a-\nu b} = -\frac{1}{\mu a+\nu b} - \frac{z}{(\mu a+\nu b)^2} - \frac{z^2}{(\mu a+\nu b)^3} - \cdots$$

$$\frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} = \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2} + \frac{2z}{(\mu a+\nu b)^3} + \frac{3z^2}{(\mu a+\nu b)^4} + \cdots$$

Mediante questi sviluppi dei loro termini, le serie stesse (1) e (2) vengono ad essere sviluppabili in serie secondo le potenze di z, e cioè si possono ridurre alla forma

$$(6)\quad \sum{}' \frac{1}{z-\mu a-\nu b} = -\sum{}' \frac{1}{\mu a+\nu b} - z\sum{}' \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2} - \dots$$

$$(7)\quad \sum{}' \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} = \sum{}' \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2} + 2z\sum{}' \frac{1}{(\mu a+\nu b)^3} + \dots ,$$

dove con $\sum'$ s'intende significare che vanno ommessi i termini non soddisfacenti la condizione (5). Alle serie, che qui compajono quali coefficienti di z, siccome casi particolari ($z=0; g=1,2,..$) delle serie (1) del § precedente, si applica il teorema che ne dichiara la convergenza ed il valore indipendenti dall'ordine dei termini per $g>2$. Perciò nella ricerca del valore di ∇ per le serie (6) e (7) si potranno tralasciare tutte le potenze di z moltiplicate per coefficienti pei quali sia $g>2$. Da qui risulta

$$\nabla\sum{}' \frac{1}{z-\mu a-\nu b} = -\nabla\sum{}' \frac{1}{\mu a+\nu b} - z\nabla\sum{}' \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2},$$

$$\nabla\sum{}' \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} = \nabla\sum{}' \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2} .$$

Restituendo infine alle serie che figurano in queste eguaglianze i termini ommessi siccome non soddisfacenti alla (5), soltanto escluso quello pel quale gli indici μ e ν hanno entrambi il valor zero; e ponendo, per brevità,

$$(8)\qquad \nabla\sum \frac{1}{\mu a+\nu b} = A \quad , \quad \nabla\sum \frac{1}{(\mu a+\nu b)^2} = B ,$$

si otterrà

$$(9)\qquad \nabla\sum \frac{1}{z-\mu a-\nu b} = -A - Bz ,$$

$$(10)\qquad \nabla\sum \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} = B .$$

Le A e B, costanti rispetto a z, dipenderanno da a e b in uno od altro modo a seconda della natura dell'alterazione nel-l'ordine dei termini.

Ora, per questo riguardo, ci limiteremo a cercare i valori di A e B per quelle alterazioni che, oltre essere semplicissime, sono anche della massima importanza, siccome quelle che, se non mutino il valore della serie, fanno prova della sua periodicità. I valori di A e B furono, del resto, investigati anche per alterazioni d'altra natura (*).

Volendo attuare in una somma od in un prodotto infinito un'alterazione nell'ordine secondo cui devonsi imaginare sommati o moltiplicati tra loro i termini o fattori, il più semplice mezzo è quello di introdurre invece dei primitivi indici μ e ν nuovi indici $\varkappa$ e λ legati ai primi da relazioni tali che ad ogni coppia di valori interi di μ e ν corrisponda una ed una sola coppia di valori interi di $\varkappa$ e λ, e viceversa; e di ritenere che la espressione finita, d'onde la infinita ha da scaturire, debba essere formata rispetto ai nuovi indici nella stessa maniera che rispetto agli indici di prima. Così, per esempio, se si consideri la serie scaturiente dalla somma

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{1}{z-\mu a-\nu b}$$

estesa a tutti i valori di μ e ν pei quali sia $\mu^2+\nu^2<R^2$, e vogliasi produrre uno spostamento nei termini di questa serie

(*) Per questo §, come pel precedente, noi attingiamo ai preziosi *Beiträge zur Theorie der elliptischen Functionen* pubblicati da Eisenstein nel tomo 35 del giorn. di Crelle (citati a pag. 20 delle *Notizie*). Le serie, di cui stiamo trattando, sono intimamente legate, come anche apparirà in questa *Sezione*, coi prodotti doppiamente infiniti pure adatti alla rappresentazione analitica della doppia periodicità. E precisamente, si è nella investigazione delle proprietà di questi prodotti che si offrono nei detti *Beiträge* (VI) le serie duppie in questione. Lo stesso avviene nei *Memoire sur les fonctions doublement périodiques* precedentemente pubblicato dal sig. Cayley nel tomo 10 del giorn. di Liouville. Quanto alle serie in questione, il sig. Cayley ivi non contempla se non che alterazioni della

$$\sum \frac{1}{(\mu a+\nu b)^s};$$

imperocchè, ammettendo egli che per ogni coppia (μ,ν) di valori degli indici debba sempre esservi anche la contraria $(-\mu,-\nu)$, la serie

$$\sum \frac{1}{\mu a+\nu b}$$

riesce sempre zero.

colla introduzione dei nuovi indici $\varkappa$ e λ, sarà da ritenersi che la novella serie sia il limite, per R crescente all'infinito, della somma

$$\sum_{\varkappa,\lambda} \frac{1}{z-\varphi(\varkappa,\lambda)a-\psi(\varkappa,\lambda)b}$$

estesa a tutti i valori di $\varkappa$ e λ pei quali riesca $\varkappa^2+\lambda^2<R^2$; $\varphi(\varkappa,\lambda)$ e $\psi(\varkappa,\lambda)$ significando le espressioni che si cavano per μ e ν dalle relazioni fra $\mu,\nu,\varkappa,\lambda$.

Vi hanno due specie di coteste trasformazioni degli indici le quali particolarmente meritano considerazione. La prima specie consiste nello stabilire fra gli indici le relazioni

$$(11) \qquad \mu=\varkappa-p \quad , \quad \nu=\lambda-q \ ,$$

essendo p, q numeri interi fissi. Se μ e ν percorreranno tutta la serie dei numeri interi, la percorreranno, per queste equazioni, anche $\varkappa$ e λ; e ad ogni coppia (μ,ν) corrisponderà una ed una sola coppia $(\varkappa,\lambda)$, e viceversa.

La seconda specie consiste nello stabilire le relazioni

$$\mu=c_{1,1}\varkappa+c_{1,2}\lambda\,,$$
$$\nu=c_{2,1}\varkappa+c_{2,2}\lambda\,,$$

delle quali i coefficienti siano numeri interi tali che il determinante

$$C=c_{1,1}c_{2,2}-c_{1,2}c_{2,1}$$

riesca ± 1. Anche queste relazioni soddisfanno alle condizioni enunciate. Infatti, se siano interi $\varkappa$ e λ, lo saranno anche μ e ν; viceversa, essendolo μ e ν, lo saranno anche $\varkappa$ e λ, perchè

$$C\varkappa=c_{2,2}\mu-c_{1,2}\nu \quad , \quad C\lambda=c_{1,1}\nu-c_{2,1} \ ;$$

e finalmente vi sarà sempre una sola coppia $(\varkappa,\lambda)$ per una data coppia (μ,ν), e viceversa. Come caso particolare di questa specie di trasformazione è da noverarsi quella che si suol dire lo scambio degli indici, scaturiente dal supporre

$$c_{1,1}=0 \ , \ c_{1,2}=1 \ , \ c_{2,1}=1 \ , \ c_{2,2}=0 \ .$$

Queste sono le specie di trasformazioni degli indici, ossia di alterazioni nell'ordine dei termini, investigate da Eisenstein nel lavoro citato. Noi ci contenteremo di seguire Eisenstein in ciò che riguarda la prima specie (*).

Basterà cercare il valore della variazione (3) ossia (9); poichè il coefficiente di z in questa, preso con segno contrario, darà senz' altro il valore della (4) ossia (10).

(*) Abbiamo già fatto osservare che, se una simile trasformazione, per quali si siano valori interi di p e q (ovvero anche soltanto per le copple $p=1$ e $q=0$, $p=0$ e $q=1$), non produca alcun cambiamento nel valor della serie, la serie è dotata dei periodi a e b. Tuttavia non è forse del tutto inopportuno l'insistere ancora su questo punto. Consideriamo la serie (1), definita come limite della prima delle somme (5) del § precedente, e di cui il valore già indicammo con $f_1(z)$. Facendo su questa serie la trasformazione (11), il termine generale da

$$\frac{1}{z-\mu a-\nu b}$$

si cambierà in

$$\frac{1}{z-(\varkappa-p)a-(\lambda-q)b}=\frac{1}{(z+pa+qb)-\varkappa a-\lambda b};$$

si che, per esempio, in luogo del termine particolare

$$\frac{1}{z-7a-4b}$$

comparirà per la serie trasformata il termine particolare

$$\frac{1}{(z+pa+qb)-7a-4b}.$$

Questa serie trasformata sarà il limite a cui tende la somma

$$\sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n}\sum_{\varkappa=-m}^{\varkappa=m}\frac{1}{(z+pa+qb)-\varkappa a-\lambda b},$$

facendo crescere infinitamente prima m e poi n; o, cambiando le lettere $\varkappa$ e λ nelle μ e ν, sarà il limite a cui tende la somma

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{(z+pa+qb)-\mu a-\nu b}.$$

Ora evidentemente, questa somma non è altro che la stessa (5) del § precedente, dove in luogo della z (la cui variabilità possiamo riflettere non esser punto limitata dalla convergenza) si metta $z+pa+qb$. Il valore adunque della serie trasformata sarà $f_1(z+pa+qb)$. E però, se la trasformazione, qualunque fossero p e q, non alterasse il valor della serie, si avrebbe la eguaglianza

$$f_1(z+pa+qb)=f_1(z),$$

che ne attesterebbe la doppia periodicità.

Potrebbesi considerare soltanto le due trasformazioni affatto particolari

$$\mu = \varkappa - 1 \quad , \quad \nu = \lambda \quad ,$$

$$\mu = \varkappa \quad , \quad \nu = \lambda - 1 \quad ,$$

delle quali la (11) può riguardarsi come composta.

Ma consideriamo a dirittura la (11). Il valore della (3) è il limite della differenza fra la somma

$$\sum_{\lambda=-n}^{\lambda=n} \sum_{\varkappa=-m}^{\varkappa=m} \frac{1}{z-(\varkappa-p)a-(\lambda-q)b}$$

e la somma (5) del § precedente

$$(12) \qquad \sum_{\nu=-n}^{\nu=n} \sum_{\mu=-m}^{\mu=m} \frac{1}{z-\mu a-\nu b} \ .$$

La prima di queste somme può anche esprimersi come segue

$$(13) \qquad \sum_{\nu=-n-q}^{\nu=n-q} \sum_{\mu=-m-p}^{\mu=m-p} \frac{1}{z-\mu a-\nu b} \ .$$

La differenza

$$(13)-(12)$$

può semplificarsi assai, perchè le somme (13) e (12) contengono in gran parte gli stessi termini. Sono, cioè, comuni ad entrambe tutti i termini pei quali μ, ν sono compresi fra i limiti

$$-m \leqq \mu \leqq m-p \quad , \quad -n \leqq \nu \leqq n-q \quad ,$$

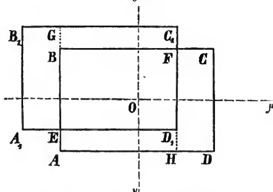
qualora p, q sieno positivi.

Per le tre altre possibili combinazioni dei segni di p, q si hanno tre altri simili sistemi di limiti che determinano sempre lo stesso numero di termini comuni, ritenendo sempre gli stessi i moduli di p, q. Ma per maggior semplicità e chiarezza prendiamo di mira soltanto la combinazione dei segni positivi.

Formiamo dunque la differenza di quelle sole parti che non sono comuni alle somme (13) e (12). A tal fine imagi-

niamo i termini disposti nella solita maniera, cioè come sta espresso nel quadro (5) del §. 42, si che ogni termine occupi il posto determinato dai suoi indici considerati come coordinate cartesiane. La (12) è la somma di tutti i termini che trovansi entro e nel perimetro del rettangolo $ABCD$ (Fig. 19) i cui

Fig. 19.



lati hanno le distanze $\pm m$ e $\pm n$ dagli assi $(O\mu, O\nu)$. Il passaggio dalla somma (12) alla (13) viene espresso geometricamente dallo scorrere del rettangolo parallelamente a se stesso nel piano, si che il lato CD riesca in C_1D_1 alla distanza $m-p$ da $O\mu$, ed il lato AD riesca in A_1D_1 alla distanza $n-q$ da $O\nu$. Le due posizioni $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ del rettangolo hanno comune la parte $EBFD_1$. E però la differenza ∇ sarà l'aggregato delle serie scaturienti dalla somma dei termini contenuti in A_1B_1GE e BGC_1F meno l'aggregato delle serie scaturienti dalla somma dei termini contenuti in $HFCD$ e AED_1H. Indicando coi rettangoli stessi le serie rispettive, potremo scrivere

$$\nabla = A_1B_1GE + BGC_1F - HFCD - AED_1H\,.$$

Facciamo crescere infinitamente m. I due rettangoli $ABCD$ e $A_1B_1C_1D_1$ si allungano infinitamente secondo $O\mu$ conservando inalterata la dimensione secondo $O\nu$. La somma dei $p(2n+1)$ termini contenuti in A_1B_1GE e quella dei $p(2n+1)$ contenuti

in $HFCD$ hanno per limite zero, essendosi dimostrata la convergenza delle serie provenienti dal far crescere m. Le due parti, all' incontro, corrispondenti a BGC_1F e AED_1H danno ciascuna origine a q serie, per le quali l' indice μ prende tutti i valori interi positivi e negativi. Le q serie del rettangolo BGC_1F si hanno da

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{1}{z-\mu a+(n+q)b}$$

dando a q i valori $1, 2, \ldots, q$. Le q serie del rettangolo AED_1H si hanno similmente da

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{1}{z-\mu a-(n-q)b} \quad .$$

Per ottenere il valore di ∇ bisogna determinare a quali limiti tendano le somme di queste serie convergenti allorchè n va all' infinito. Considerando la prima, la somma sua per n finito, in forza della (9) del § 58 dove si ponga $\nu=-n-q$, è data da

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{1}{z-\mu a+(n+q)b} = \frac{\pi}{a} \frac{\cos \pi \dfrac{z+qb+nb}{a}}{\operatorname{sen} \pi \dfrac{z+qb+nb}{a}} = \frac{\pi i}{a} \frac{\psi + \dfrac{1}{\psi}}{\psi - \dfrac{1}{\psi}} ,$$

messo, per brevità,

$$\psi = e^{i\pi \frac{z+qb+nb}{a}} = e^{i\pi \frac{z+qb}{a}} \cdot e^{\frac{i\pi b}{a} n} .$$

Ora dovremo osservare se, crescendo n, cresca positivamente o negativamente la parte reale di questo esponente; poichè nel primo caso la esponenziale ψ tenderà a ∞, nel secondo a 0. E perciò basta osservare come cresca la parte reale della quantità

$$\frac{i\pi b}{a} n \quad .$$

Se il coefficiente di i nel rapporto $\frac{b}{a}$ sarà positivo, sarà nega-

tiva la parte reale di $\frac{i\pi b}{a}n$, quindi la ψ tenderà a zero, e la frazione

$$\frac{\pi i}{a}\frac{\psi+\frac{1}{\psi}}{\psi-\frac{1}{\psi}}=\frac{\pi i}{a}\frac{\psi^2+1}{\psi^2-1}$$

tenderà a $-\frac{\pi i}{a}$. Quando invece il coefficiente di i nel suddetto rapporto sarà negativo, la ψ tenderà a ∞, e la frazione

$$\frac{\pi i}{a}\frac{\psi+\frac{1}{\psi}}{\psi-\frac{1}{\psi}}=\frac{\pi i}{a}\frac{1+\frac{1}{\psi^2}}{1-\frac{1}{\psi^2}}$$

tenderà a $\frac{\pi i}{a}$. Indicando con ε una quantità che debba avere il valore $+1$ o -1, secondochè il coefficiente di i in $\frac{b}{a}$ sia positivo o negativo, avremo in ogni caso

$$(14)\qquad \lim_{n=\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{z-\mu a+(n+q)b}=\frac{\varepsilon\pi i}{a}.$$

Similmente si trova

$$(15)\qquad \lim_{n=\infty}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{z-\mu a-(n-q)b}=-\frac{\varepsilon\pi i}{a}.$$

Dunque ∇ eguaglia la somma di q serie di valore $\frac{\varepsilon\pi i}{a}$ meno la somma di q serie di valore $-\frac{\varepsilon\pi i}{a}$, cioè

$$\nabla\sum\frac{1}{z-\mu a-\nu b}=2q\frac{\varepsilon\pi i}{a}.$$

Questo risultato vale per p e q sì positivi che negativi.

Esso è indipendente da z, e, ricordando le (9) e (10), somministra

$$A = -\frac{2q\varepsilon\pi i}{a} \quad , \quad B = 0 \ .$$

Da qui si vede che

$$\nabla \sum \frac{1}{(z-\mu a-\nu b)^2} = 0 \quad ,$$

cioè che la serie (2) è doppiamente periodica. Ma non dimentichiamo che, diversamente dai casi nei quali l'esponente del denominatore supera il 2, essa serie resta soltanto dimostrata doppiamente periodica nella supposizione che provenga come si è dichiarato dalla somma finita (5) del § precedente.

Quanto alla serie (1), il suo valore non si cambia cambiando z in $z+pa$, poichè in tal caso q è zero; essa quindi ammette il periodo a. Ma non ammette il periodo b; però, facendo crescere z di multipli di b, essa cresce degli stessi multipli di $\frac{2\varepsilon\pi i}{b}$. È poi chiaro che, definendo la (1) ancora come limite della espressione finita (5) del § precedente, ma in cui debba crescere infinitamente prima n e poi m, si avrebbe una funzione dotata del periodo b, invece dell' a.

Egli è facile, del resto, persuadersi che si può ottenere la doppia periodicità anche per una serie avente per termine generale l'unità divisa per una funzione lineare di z, e definita come limite di una somma analoga alla (5) del § precedente. Prendendo invece del tipo (1) il tipo (2) § 57, cioè considerando la serie

$$\sum_{\mu,\nu} \frac{(-1)^\nu}{z-\mu a-\frac{\nu}{2}b} \ ,$$

applicandovi la trasformazione di indici (11) e ragionando come già per la serie (1), si trova che la variazione

$$\nabla \sum \frac{(-1)^\nu}{z-\mu a-\frac{\nu}{2}b}$$

eguaglia il limite a cui tende, per n crescente all' infinito, la somma delle q serie $(q=1,2,\ldots,q)$

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{(-1)^{n+q}}{z-\mu a+\frac{n+q}{2}b}=(-1)^{n+q}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{z-\mu a+\frac{n+q}{2}b}$$

meno la somma delle q

$$\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} \frac{(-1)^{-n+q}}{z-\mu a-\frac{n-q}{2}b}=(-1)^{-n+q}\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\frac{1}{z-\mu a-\frac{n-q}{2}b}\ .$$

Ora, facendo astrazione dal fattore $(-1)^n=(-1)^{-n}$ che è sempre lo stesso per tutte, e riflettendo alle (14) e (15) nelle quali s' imagini $\frac{b}{2}$ in luogo di b, è chiaro che le prime q serie avranno ciascuna per valore

$$(-1)^q\frac{\varepsilon\pi i}{a}\qquad (q=1,2,\ldots,q$$

e le seconde q

$$-(-1)^q\frac{\varepsilon\pi i}{a}\qquad (q=1,2,\ldots,q\quad .$$

E però, se q sarà pari, i valori delle prime q serie si distruggeranno tra loro nella somma, e così pure quelli delle seconde q, e sarà quindi

$$\nabla\sum\frac{(-1)^\nu}{z-\mu a-\frac{\nu}{2}b}=0\ .$$

La serie adunque, non alterandosi se a z si aggiunga un multiplo qualunque di a ed un multiplo pari di $\frac{b}{2}$, possiede i periodi a e b. Moltiplicata per $\frac{b}{2\pi}$, questa serie equivale alla serie semplice considerata nel § 56.

§. 60. Nei §§ 54 e 57 abbiamo visto la periodicità scaturire effettivamente dalla forma infinita delle espressioni. Tuttavia le serie che forse più comunemente s'intendono nell'appellazione di serie periodiche sono le serie semplici e dotate di semplice periodicità che procedono secondo i seni e i coseni dei multipli di un'arco x, o, ciò ch'è lo stesso, secondo le potenze intere positive e negative di una esponenziale e^{ix}; le quali s'intitolano anche da Fourier, perchè fu questo grande matematico che pel primo ne riconobbe pienamente l'alta importanza per lo esprimere funzioni arbitrarie (*Théorie analytique de la Chaleur*).

Metteremo in debita luce nelle *Sezioni* successive di quanto momento anche nella teorica delle funzioni di variabili complesse queste serie sieno diventate; ma intanto vogliamo impiegarle per ricordare uno dei modi di conseguire il principale strumento analitico della teorica delle funzioni doppiamente periodiche, cioè lo strumento ϑ; nel quale però, mentre la natura già periodica dei singoli termini dà luogo ad un periodo, anche la forma infinita dà luogo ad una proprietà che permette di attuare con esso immantenente la periodicità doppia.

In una serie della forma

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{2m\frac{i\pi z}{\beta}} ,$$

che sia convergente per qualunque valor finito di z, e che, quindi, definisca una funzione a un valore continua e finita per qualunque valor finito di z e dotata del periodo β, non può aver luogo un secondo periodo α (*). Bensì può il secondo periodo verificarsi in un quoziente di simili serie. Ed invero

(*) Premettendo che qualunque funzione di z a un valore continua e finita per ogni valor finito di z e dotata del periodo β può rappresentarsi, in una sola maniera d'altronde, con una serie della detta forma; si avrebbe nella proposizione su enunciata un'insigne teorema dovuto al sig. Liouville (*Notizie*, pag. 112). Ma, come or ora accennammo, non dobbiamo dimostrare adesso siffatte proposizioni che si offriranno affatto spontaneamente nelle *Sezioni* successive. Osserveremo del pari, che non è in questi paragrafi che si potrebbe adeguatamente mostrare quanto sia naturale la introduzione delle funzioni ϑ, di più variabili non che di una, nella scienza.

consideriamo la espressione

$$\frac{\sum A_m\, e^{2zm}}{\sum B_m\, e^{2zm}} \qquad (^*)$$

e cerchiamo di determinare A_m e B_m colla condizione

$$\frac{\sum A_m\, e^{2zm}}{\sum B_m\, e^{2zm}} = \frac{\sum A_m e^{2(z+\alpha)m}}{\sum B_m e^{2(z+\alpha)m}} .$$

Togliendo i denominatori, questa eguaglianza diviene

$$\sum A_m\, e^{2zm} \sum B_m\, e^{2(z+\alpha)m} = \sum B_m\, e^{2zm} \sum A_m\, e^{2(z+\alpha)m} ,$$

in cui i coefficienti di una stessa esponenziale $e^{2z\mu}$ dovranno essere eguali. Ora, si riconosce tosto che questi coefficienti saranno le serie

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_{\mu-m}\, B_m e^{2\alpha m} \quad , \quad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_{\mu-m}\, B_m e^{2\alpha(\mu-m)},$$

di modo che, mettendo per un momento n invece di m per indice nel termine generale della seconda, si avrà la seguente condizione, che dovrà essere soddisfatta qualunque sia μ,

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_{\mu-m}\, B_m\, e^{2\alpha m} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_{\mu-n}\, B_n\, e^{2\alpha(\mu-n)} .$$

Potrà sembrare difficile di cavare da qui le funzioni incognite A_m e B_m nella massima generalità: e però ci limiteremo a considerare quella soluzione che si presenta spontaneamente e che consiste nel soddisfare la condizione precedente eguagliando tra loro gli stessi due termini generali. Porremo dunque

$$A_{\mu-m}\, B_m\, e^{2\alpha m} = A_{\mu-n}\, B_n\, e^{2\alpha(\mu-n)} ,$$

ed imagineremo che n sia espresso in funzione di m, in guisa che queste due quantità possano rappresentare nello stesso

(*) Scrivendo z invece di $\frac{i\pi z}{\beta}$ (il che vale quanto supporre $\beta = \pi i$) la serie precedentemente considerata prende l'aspetto $\sum A_m e^{2mz}$. Per simili sostituzioni uno dei periodi di una qualsivoglia funzione periodica potrà sempre supporsi ridotto a πi.

tempo la serie completa dei numeri interi; il che si otterrà facendo

$$n = m + k\,,$$

dove k esprima un numero intero. Con ciò la eguaglianza precedente, scritta sotto la forma

$$\frac{A_{\mu-m}}{A_{\mu-n}\, e^{2\alpha(\mu-n)}} = \frac{B_n}{B_m\, e^{2\alpha m}}\,,$$

diverrà

$$\frac{A_{\mu-m}}{A_{\mu-m-k}\, e^{2\alpha(\mu-m-k)}} = \frac{B_{m+k}}{B_m e^{\frac{2}{a}m}}\,.$$

Ma, dovendosi soddisfare a questa condizione qualunque sia μ, si potrà porre

$$\mu - m - k = m_1$$

essendo m_1 affatto indipendente da m. Ciò darà

$$\frac{A_{m_1+k}}{A_{m_1}\, e^{2\alpha m_1}} = \frac{B_{m+k}}{B_m\, e^{2\alpha m}}\,,$$

d' onde si vede che ciascun membro è una quantità costante. Dunque le funzioni incognite A_m e B_m sono due soluzioni della equazione alle differenze finite

$$\frac{u_{m+k}}{u_m e^{2\alpha m}} = \text{Costante}\,,$$

il cui integrale generale è

$$u_\mu = e^{\frac{\alpha}{k}m^2 + \alpha c m}\, v_m\,,$$

dove c dipende dalla costante del secondo membro e v_m deve soddisfare la condizione

$$v_{m+k} = v_m\,.$$

Alla costante c si può dare, come si vede, un valor particolare qualsiasi c_0, senza restringere la generalità del risultato; bastando di cambiare poi nella funzione la z in $z + \alpha\frac{c - c_0}{2}$ per far ricomparire la c qualunque. Diamo pertanto a c il va-

lor zero, ossia prendiamo per A_m e B_m i valori seguenti

$$A_m = a_m e^{\frac{a}{k} m^2}\ ,\quad B_m = b_m e^{\frac{a}{k} m^2}\ ,$$

dove a_m e b_m significhino quantità soddisfacenti le

$$a_{m+k} = a_m \quad ,\quad b_{m+k} = b_m\ .$$

Ponendo

$$\Phi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{\frac{a}{k} m^2 + 2zm}\ ,$$

$$\Psi(z) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} b_m e^{\frac{a}{k} m^2 + 2zm}\ ,$$

il quoziente $\frac{\Phi(z)}{\Psi(z)}$ sarà l' espressione di una funzione doppiamente periodica risultante dall'analisi che si è fatta; ed ora si tratta di esaminare più da vicino queste serie rimarchevoli alle quali ci troviamo condotti pel numeratore e pel denominatore.

Per le relazioni $a_{m+k} = a_m$, $b_{m+k} = b_m$ è manifesto che coll' intero k si introducono in ciascuna delle funzioni Φ e Ψ k costanti arbitrarie. Ritenute queste costanti per la Φ espresse con

$$a_0\ ,\ a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_{k-1}\ ,$$

imaginiamo raccolti, come a formare una serie separata, tutti i termini contenenti a_0, e poi similmente tutti quelli contenenti a_1, ecc. Avremo

$$\Phi = a_0 \Phi_0 + a_1 \Phi_1 + \ldots + a_{k-1} \Phi_{k-1}\ ,$$

essendo $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1}$ serie non contenenti altre quantità fuorchè k, a, z. Sarà quindi anche

$$\Psi = b_0 \Phi_0 + b_1 \Phi_1 + \ldots + b_{k-1} \Phi_{k-1}\ .$$

Esaminiamo una qualsivoglia di queste serie componenti: sia la Φ_t, significando t uno dei numeri $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Essa consta di tutti i termini che si ottengono dal termine generale

$$e^{\frac{a}{k} m^2 + 2zm}$$

dando a m tutti i valori

$$\ldots, -2k+t, -k+t, t, t+k, t+2k, \ldots ;$$

ossia, intendendo pur sempre con m un'indice che deva percorrere tutta la serie dei numeri interi, la Φ_t sarà espressa da

$$\Phi_t = \sum e^{\frac{\alpha}{k}(t+mk)^2 + 2z(t+mk)} .$$

Ora possiamo portare fuori del segno sommatorio il fattore

$$e^{2tz + \frac{\alpha}{k}t^2}$$

e scrivere Φ_t come segue

$$\Phi_t = e^{2tz + \frac{\alpha}{k}t^2} \sum e^{k\alpha m^2 + 2(kz+\alpha t)m} .$$

Nello studio di questa serie potremo mettere una semplice lettera, simbolo della variabile, in luogo di $kz+\alpha t$. Imaginando messa la lettera z, e messo altresì α invece di $k\alpha$, è chiaro che le funzioni

$$\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{k-1},$$

e quindi tutte le funzioni somministrate dalla precedente analisi, riduconsi infine all'unico ente analitico

$$(1) \qquad \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\alpha m^2 + 2zm} .$$

È questa la celebre trascendente introdotta da Jacobi nello studio delle funzioni ellittiche; di essa passeremo a mettere in rilievo le proprietà fondamentali, designandola, secondo l'uso, con $\vartheta(z)$.

Relativamente alla convergenza, la condizione perchè essa nella ϑ abbia luogo si è *che sia negativa la parte reale di* αm^2, *cioè dire di* α.

Infatti, designando con α' la parte reale di α, ed x esprimendo come sempre la parte reale di z, il termine generale

$$Q_m = e^{\alpha m^2 + 2zm}$$

ha per modulo

$$\text{mod } Q_m = e^{\alpha' m^2 + 2xm} ,$$

e questo modulo ha per radice $m$esima (*) la quantità

$$\operatorname{mod} Q_m^{\frac{1}{m}} = e^{\alpha' m + 2x} = e^{2x}\left[e^{\alpha'}\right]^m$$

la quale al crescere di m, se α' sia negativa, tende a zero qualunque sia il valore finito di x.

Questa serie, siccome procedente secondo le potenze quadratiche di e^{α}, presenta per tutti i valori finiti della variabile la convergenza la più rapida, e di cui non si era per anche dato alcun esempio nell' analisi.

Pel teorema del § 49 *questa serie rappresenta una funzione di z continua, oltrechè finita, per qualunque valor finito di z.*

Il valore di questa serie resta invariato se si cambi nel suo termine generale, cioè dire nella espressione che sta sotto il sommatorio, la lettera m in $-m$; poichè m deve percorrere tutta la serie dei numeri interi positivi e negativi. Ma questo cambiamento equivale al cambiare z in $-z$; dunque è

(2) $$\vartheta(z) = \vartheta(-z)$$

ossia *la ϑ è funzione pari.*

Sappiamo già come questa funzione *possegga il periodo πi, cioè la proprietà*

(3) $$\vartheta(z) = \vartheta(z + \pi i).$$

Ora vediamo come si comporti quando si muti z in $z + \alpha$. A tal fine riflettasi che il valore della (1) non si altera se si scriva $m+1$ (o se anche si scrivesse $m+h$, essendo h numero intero fisso) invece di m nel termine generale. Scrivendo $m+1$ e osservando che

$$\alpha(m+1)^2 + 2z(m+1) = \alpha m^2 + 2(z+\alpha)m + \alpha + 2z,$$

e che il fattore d' esponente $\alpha + 2z$ può scriversi fuori del sommatorio, si ottiene

$$\sum e^{\alpha(m+1)^2 + 2z(m+1)} = e^{2z+\alpha} \sum e^{\alpha m^2 + 2(z+\alpha)m}$$

(*) Per semplicità è qui preso di mira soltanto il senso secondo cui l' indice ha i valori positivi; per l' altro senso sarebbe da imaginarsi estratta la radice $(-m)$esima.

cioè *la proprietà*

(4) $$\vartheta(z) = e^{2z+\alpha}\,\vartheta(z+\alpha).$$

Questo risultato mette in evidenza come si produca la doppia periodicità in un quoziente qual' era $\frac{\Phi}{\Psi}$. Ciascuno dei termini del quoziente ammette il periodo πi, e, quando si cambia z in $z+\alpha$, essi non fanno che prendere uno stesso fattore esponenziale che sparisce per la divisione.

Esprimendo g un' intero qualsiasi, invece della (3) possiamo scrivere la

(5) $$\vartheta(z) = \vartheta(z + g\pi i).$$

Ed esprimendo h pure un intero qualsiasi, se nel termine generale della (1) si cambia m in $m+h$ e si osserva che

$$\alpha(m+h)^2+2z(m+h)=\alpha m^2+2(z+\alpha h)m$$
$$+\alpha h^2+2hz\,,$$

si trova la

(6) $$\vartheta(z) = e^{2hz+\alpha h^2}\,\vartheta(z+\alpha h)\;,$$

che contiene la (4) come caso particolare. Da questa formola, cambiando z in $z+g\pi i$ ed osservando la precedente, si ha

(7) $$\vartheta(z) = e^{2hz+\alpha h^2}\,\vartheta(z+g\pi i+\alpha h)\;,$$

che può considerarsi come racchiudente in sè le (5) e (6), ossia entrambe le proprietà (3) e (4).

È facile dimostrare che *la funzione ϑ si annulla per tutti i valori di z dati dalla formola*

(8) $$z = \frac{2g+1}{2}\pi i + \frac{2h+1}{2}\alpha\;.$$

Ed invero, osserviamo che il valore della (1) non si altera se in luogo di m si ponga nel termine generale $-(m+h')$, intendendo con h' un numero intero. La $\vartheta(z)$ si può dunque esprimere anche con

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{\alpha(m+h')^2-2z(m+h')}$$

ed anche colla semisomma di questa espressione e della (1)

$$\vartheta(z)=\frac{1}{2}\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\left\{e^{am^2+2zm}+e^{a(m+h')^2-2z(m+h')}\right\} .$$

Ora una espressione come

$$e^A+e^B=e^A-e^{B+\pi i}$$

si annulla quando A differisca da $B+\pi i$ di un multiplo di $2\pi i$, o, ciò che è lo stesso, quando A differisca da B di un multiplo dispari di πi. Dunque il termine $m$esimo della serie, secondo membro della precedente eguaglianza, sarà nullo se la differenza

$$[am^2+2zm]-[a(m+h')^2-2z(m+h')]=(2z-ah')(2m+h')$$

riesca un multiplo dispari di πi. E, se si determina la variabile z in modo che questa differenza riesca un multiplo dispari di πi *qualunque sia* m, allora saranno nulli tutti i termini della serie e quindi anche la somma $\vartheta(z)$. Ora, ponendo

$$2z-ah'=g'\pi i ,$$

la detta differenza riducesi a

$$2mg'\pi i+g'h'\pi i ,$$

la qual quantità sarà sempre un multiplo dispari di πi se sia dispari il prodotto

$$g'h'$$

cioè se siano dispari, ma quali si vogliano del resto, gl' interi g' e h'. Scrivendo $2g+1$ e $2h+1$ invece di g' e h', la equazione $2z-ah'=g'\pi i$ dà appunto per z i valori (8).

Volendo considerare il solito piano rappresentativo dei valori di z, se lo si imagina diviso in liste mediante le parallele all' asse reale che si succedono alla distanza π l'una dall'altra, la funzione ϑ prende già tutti i valori di cui è suscettibile anche in una sola di coteste liste. Se poi si imagina l' altro sistema di parallele, che col precedente divide il piano in una doppia infinità di parallelogrammi tutti eguali, di cui uno abbia

i vertici nei punti

$$0,\ i\pi,\ a,\ i\pi+a,$$

si riconoscerà che i punti (8) sono i centri di questi parallelogrammi.

Le formole (3) e (4), ovvero la (7), indicano che divenga la funzione ϑ facendo crescere la variabile di multipli (interi) dei periodi πi e a. Ma giova considerare non soltanto i risultati che si hanno facendo crescere la variabile di multipli interi, ma anche di multipli fratti dei periodi. Qui però ci limiteremo alle metà. Cambiando dunque la z successivamente in

$$z+\frac{1}{2}\pi i,\quad z+\frac{1}{2}a,\quad z+\frac{1}{2}\pi i+\frac{1}{2}a$$

nella formola (1), e riflettendo che fattori non contenenti la m possono sempre portarsi fuori del sommatorio, avremo tosto

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}\pi i\right)=\sum e^{am^2+2\left(z+\frac{1}{2}\pi i\right)m},$$

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}a\right)=e^{-z-\frac{1}{4}a}\sum e^{a\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+2z\left(m+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}\pi i+\frac{1}{2}a\right)=e^{-z-\frac{1}{2}\pi i-\frac{1}{4}a}\sum e^{a\left(m+\frac{1}{2}\right)^2+2\left(z+\frac{1}{2}\pi i\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}.$$

Le tre serie che figurano in questi secondi membri possono riguardarsi, insieme colla (1), come casi particolari della seguente

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} e^{a\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i\right)\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

cioè quei casi che si hanno supponendo ε e ε' eguali a 0 e a 1. Questa serie, simile alla (1), può essere opportunamente designata applicando alla stessa lettera ϑ il sistema delle quantità ε e ε'; sistema che, seguendo il sig. Riemann, chiameremo la *caratteristica* della funzione ϑ, siccome contenente gli elementi che (dato essendo a) individuano a pieno cotesta fun-

zione. Porremo dunque

$$(9) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)=\sum e^{\alpha\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i\right)\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)}.$$

Con questa notazione (*) le tre precedenti eguaglianze insieme con la (1) danno

$$\vartheta(z)= \qquad \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(z)\;,$$

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}\pi i\right)= \qquad \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(z)\;,$$

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}\alpha\right)=e^{-z-\frac{1}{4}\alpha}\;\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(z)\;,$$

$$\vartheta\left(z+\frac{1}{2}\pi i+\frac{1}{2}\alpha\right)=e^{-z-\frac{1}{2}\pi i-\frac{1}{4}\alpha}\;\vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z)\;,$$

ovvero, in compendio,

$$(10) \qquad e^{\varepsilon z+\frac{\varepsilon\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{\varepsilon}{4}\alpha}\;\vartheta\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{\varepsilon}{2}\alpha\right)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)\;,$$

le quali ricordano come i quattro valori considerati della ϑ riducansi alle funzioni

$$(11) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}(z),\quad \vartheta\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}(z),\quad \vartheta\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}(z),\quad \vartheta\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}(z),$$

e come, viceversa, queste funzioni riducansi, con un fattore esponenziale se occorra, alla sola ϑ primieramente considerata.

Tenendo le $\varepsilon, \varepsilon'$ limitate a valori numerici interi, dalla (9) non possono scaturire altre funzioni fuorchè le (11) col segno proprio o cambiato. Infatti, il cambiare ε in $\varepsilon\pm 2$ nel termine generale della (9) equivale al cambiarvi m in $m\pm 1$, il che sappiamo non alterare il valore della serie; dunque è

$$(12) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\pm 2\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)=\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)\,.$$

(*) È però più usata e più comoda nel caso attuale la $\vartheta_{\varepsilon,\varepsilon'}(z)$. Ma adottiamo sin d'ora la notazione del sig. Riemann affinchè sia già famigliare quando, fra breve, la useremo per funzioni ϑ di più variabili.

Il cambiare poi ε' in $\varepsilon' \pm 2$ produce nell' esponente l' incremento $\pm 2\pi i\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)$. Ma

$$e^{\pm 2\pi i\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)} = e^{\pm \pi i \varepsilon} = (-1)^{\varepsilon};$$

quindi

(13) $$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\pm 2\end{bmatrix}(z) = (-1)^{\varepsilon}\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z) .$$

Dunque, per avere dalla (9) tutte le possibili funzioni distinte corrispondenti a valori interi di ε e ε', basta attribuire a queste quantità i valori 0 e 1.

Ponendo $q = e^{a}$, scrivendo ix in luogo di z, ed introducendo le funzioni circolari invece della esponenziale, le espressioni delle (11) divengono

$$\vartheta\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}(ix) = 1 + 2\,\{\, q\cos 2x + q^{4}\cos 4x + q^{9}\cos 6x + \ldots \,\},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(ix) = 1 - 2\,\{\, q\cos 2x - q^{4}\cos 4x + q^{9}\cos 6x - \ldots \,\},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}(ix) = \quad 2\,\{\, q^{\frac{1}{4}}\cos x + q^{\frac{9}{4}}\cos 3x + q^{\frac{25}{4}}\cos 5x + \ldots \,\},$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}(ix) = \ - 2\,\{\, q^{\frac{1}{4}}\operatorname{sen} x - q^{\frac{9}{4}}\operatorname{sen} 3x + q^{\frac{25}{4}}\operatorname{sen} 5x - \ldots \,\} \ (^{*}).$$

Cerchiamo per la $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon \\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)$, nel supposto di ε e ε' numeri interi, le eguaglianze analoghe alle (2), (3), (4). Come già

(*) Jacobi designava queste quattro funzioni nel *Fund. Nov.* mediante le lettere Θ e H, e più tardi mediante $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Ritenuto $a = -\frac{\pi K'}{K}$, cioè identici i due q, si ha

$$\vartheta\begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix}(ix) = \Theta\left(\frac{2K}{\pi}\left\{x+\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \vartheta_3(x) .$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}0 \\ 1\end{bmatrix}(ix) = \Theta\left(\frac{2K}{\pi}x\right) = \vartheta(x) ,$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix}(ix) = \mathrm{H}\left(\frac{2K}{\pi}\left\{x+\frac{\pi}{2}\right\}\right) = \vartheta_2(x) ,$$

$$\vartheta\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}(ix) = -\mathrm{H}\left(\frac{2K}{\pi}x\right) = -\vartheta_1(x) .$$

per ottenere la (2), anche qui osserviamo che nel termine generale della (9) si può cambiare $m+\frac{\varepsilon}{2}$ in $-\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)$; poichè questa quantità non fa che percorrere in senso contrario gli stessi valori dell'altra. Ma siffatto cambiamento equivale al cambiare z in $-z$ e moltiplicare per

$$e^{-4\frac{\varepsilon'}{2}\pi i\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)}=e^{-\varepsilon\varepsilon'\pi i}=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'};$$

dunque sarà

(14) $$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z)=(-1)^{\varepsilon\varepsilon'}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](-z).$$

È evidente la

$$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](-z)=\vartheta\left[\begin{smallmatrix}-\varepsilon\\ -\varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z).$$

La (14) mostra, ciò che del resto era già evidente pei precedenti sviluppi, che, delle funzioni (11), le tre colle caratteristiche

$$\left[\begin{smallmatrix}0\\ 0\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}0\\ 1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right]\qquad(\varepsilon\varepsilon'=0$$

sono pari, e la quarta colla caratteristica

$$\left[\begin{smallmatrix}1\\ 1\end{smallmatrix}\right]\qquad(\varepsilon\varepsilon'=1$$

è dispari.

Come analoga della (3), cambiando nella (9) z in $z+\pi i$, cambiamento che equivale a quello di ε' in $\varepsilon'+2$, si ha

(15) $$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z)=(-1)^{\varepsilon}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z+\pi i).$$

Come analoga della (4), cambiando nel termine generale della (9) m in $m+1$ ed osservando che

$$\alpha\left(m+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(z+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i\right)\left(m+1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$=\alpha\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)^2+2\left(z+\alpha+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i\right)\left(m+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$+\alpha+2z+\varepsilon'\pi i,$$

si ha

(16) $$\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z)=(-1)^{\varepsilon'}e^{2z+\alpha}\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{smallmatrix}\right](z+\alpha).$$

Analoga della (7) è la

$$(17) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z) = (-1)^{g\varepsilon + h\varepsilon'} e^{2hz + \alpha h^2} \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z + g\pi i + \alpha h).$$

Circa l'annullarsi delle funzioni (11) osserveremo che per le (8) e (10) la $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon\\ \varepsilon'\end{bmatrix}(z)$ sarà manifestamente nulla ogni qualvolta z prenda un valore compreso nella formola

$$(18) \qquad z + \frac{\varepsilon'}{2}\pi i + \frac{\varepsilon}{2}\alpha = \frac{2g+1}{2}\pi i + \frac{2h+1}{2}\alpha .$$

I rapporti di tre funzioni (11) alla quarta somministrano tre funzioni doppiamente periodiche (*).

§. 61. Passiamo a considerare una serie ϑ $p$upla. Il logaritmo del termine generale nella ϑ semplice vedemmo essere una funzione intera di secondo grado dell'indice m. Per serie ϑ $p$upla intendesi una serie p volte infinita in cui il logaritmo del termine generale sia una funzione intera di secondo grado dei p indici.

Indicando con

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdot & \cdot & a_{p1} \\ & a_{22} & a_{32} & \cdot & \cdot & a_{p2} \\ & & a_{33} & \cdot & \cdot & a_{p3} \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot \\ & & & & & a_{pp} \end{matrix}$$

e

$$w_1, w_2, w_3, \cdot \quad \cdot, w_p$$

$\frac{p(p+1)}{2} + p$ quantità indipendenti dagli indici, il detto logaritmo (astrazion fatta da un termine non contenente gli indici,

(*) Sono le tre funzioni ellittiche. Alle formole della nota precedente vanno congiunte le

$$\text{sen am}\frac{2K}{\pi}x = \frac{-1}{\sqrt{k}}\frac{\vartheta\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(ix)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(ix)}, \quad \cos\text{am}\frac{2K}{\pi}x = \sqrt{\frac{k'}{k}}\frac{\vartheta\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}(ix)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(ix)}, \quad \Delta\,\text{am}\frac{2K}{\pi}x = \sqrt{k'}\frac{\vartheta\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}(ix)}{\vartheta\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}(ix)}.$$

il quale produrrebbe un fattor comune a tutti i termini della serie) potrà esprimersi con

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} w_\mu m_\mu$$

ovvero con

$$\varphi(m_1, \ldots, m_p) + 2 \sum_1^p w_\mu m_\mu \quad ,$$

ritenuto

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=p} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu = \varphi(m_1, \ldots, m_p) \ ,$$

e supponendosi, qualunque siano μ e ν,

$$a_{\mu\nu} = a_{\nu\mu} \ .$$

E la serie potrà esprimersi con

$$\sum_{m_p=-\infty}^{m_p=+\infty} \cdots \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} e^{\varphi(m_1, \ldots, m_p) + 2 \sum_1^p w_\mu m_\mu} \ .$$

Le quantità $a_{\mu\nu}$ saranno da riguardarsi, come già α nel § precedente, quali costanti; e le w_μ, come già z, quali argomenti ossia variabili della serie. E perciò questa verrà designata con

$$\vartheta(w_1, w_2, \ldots, w_p).$$

Per brevità, allorchè le espressioni dei p argomenti della ϑ ed, in generale, di p quantità, d' onde dipenda una qualsia formola o funzione, differiranno tra loro soltanto per l' indice $(1, \ldots, p)$, chiuderemo sotto il segno della funzione, però in doppia parentesi, soltanto la espressione generale delle dette quantità, ommettendo l' indice se non sia necessario, o altrimenti designandolo di regola con τ. Sarà dunque da ritenersi

$$\varphi(m_1, \ldots, m_p) = \varphi((m)) = \varphi((m_\tau)) \ ,$$

$$(1) \qquad \vartheta(w_1, \ldots, w_p) = \vartheta((w)) = \vartheta((w_\tau)) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} \right)^p e^{\varphi((m)) + 2 \sum_1^p w_\mu m_\mu} \ .$$

Per facilità e chiarezza daremo in disteso parte delle formole pel caso particolare $p=2$ (*). Per questo caso è

$$(1)' \quad \vartheta(w_1, w_2) = \sum_{m_2=-\infty}^{m_2=+\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} e^{a_{11}m_1^2+2a_{12}m_1m_2+a_{22}m_2^2+2w_1m_1+2w_2m_2}.$$

Relativamente alla convergenza, la condizione perchè essa abbia luogo si è *che la parte reale della forma quadratica* $\varphi((m))$ *sia negativa per qualunque coppia di valori degli indici* m (**).

Soddisfatta questa condizione la serie $\vartheta((w))$ può riguardarsi come *funzione di ciascuna separatamente e quindi di tutte insieme le variabili* w, *ad un valore e continua e finita per tutti i valori finiti delle medesime.*

Se si cambiano m_1 e m_2 in $-m_1$ e $-m_2$ nel termine generale della serie (1)', il valore della serie non subisce alterazione, e, siccome questo cambiamento equivale al cambiare w_1 e w_2 in $-w_1$ e $-w_2$, così si ha

$$(2)' \qquad \vartheta(w_1, w_2) = \vartheta(-w_1, -w_2)$$

cioè *la* $\vartheta(w_1, w_2)$ *è funzione pari.*

Analogamente si ha

$$(2) \qquad \vartheta((w)) = \vartheta((-w)).$$

Di conformità alle (3) e (4) del § precedente, la $\vartheta(w_1, w_2)$ ha la proprietà che *sonovi sistemi di simultanee variazioni degli argomenti* w_1, w_2 *pei quali il logaritmo di* ϑ *varia soltanto di una funzione lineare di essi argomenti; e propriamente, che sonovi* $2.2=4$ *sistemi di questa sorta indipendenti tra loro.* Due

(*) Le formole analoghe del passato e del presente paragrafo si troveranno in oltre designate cogli stessi numeri.

(**) Indicando con $a'_{\mu\nu}$ la parte reale di $a_{\mu\nu}$, la parte reale di $\varphi((m))$ è $\sum\sum a'_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$. Pel caso $p=2$, osservando la identità

$$a'_{11}m_1^2+2a'_{12}m_1m_2+a'_{22}m_2^2=a'_{11}\left(m_1+\frac{a'_{12}}{a'_{11}}m_2\right)^2+\frac{1}{a'_{11}}\left(a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}\right)m_2^2 ,$$

è chiaro che la detta condizione della convergenza traducesi nelle due

$$a'_{11}<0 , \quad a'_{11}a'_{22}-a'^2_{12}<0 ,$$

nelle quali è inchiusa la $a'_{22}<0$.

sono i segnenti

$$\pi i\ ,\ 0\ ,$$
$$0\ ,\ \pi i\ ,$$

che danno luogo alle

$$(3)' \quad \begin{cases} \vartheta(w_1, w_2) = \vartheta(w_1 + \pi i, w_2) \\ \vartheta(w_1, w_2) = \vartheta(w_1, w_2 + \pi i)\ . \end{cases}$$

Gli altri due sono

$$a_{11}\ ,\ a_{21}\ ,$$
$$a_{12}\ ,\ a_{22}\ ,$$

che danno luogo alle

$$(4)' \quad \begin{cases} \vartheta(w_1, w_2) = e^{2w_1+a_{11}}\,\vartheta(w_1 + a_{11}, w_2 + a_{21})\ , \\ \vartheta(w_1, w_2) = e^{2w_2+a_{22}}\,\vartheta(w_1 + a_{12}, w_2 + a_{22})\ . \end{cases}$$

La prima di queste si ottiene cambiando nel termine generale della (1)' m_1 in m_1+1, il che non altera il valore della serie, ed osservando la identità

$$a_{11}(m_1+1)^2+2a_{12}(m_1+1)m_2+a_{22}m_2^2+2w_1(m_1+1)+2w_2m_2$$
$$=a_{11}m_1^2+2a_{12}m_1m_2+a_{22}m_2^2+2(w_1+a_{11})m_1+2(w_2+a_{21})m_2$$
$$+a_{11}+2w_1\ .$$

La seconda si ottiene cambiando m_2 in m_2+1.

Analogamente si hanno

$$(3) \qquad \vartheta((w)) = \vartheta(w_1, \ldots, w_\nu + \pi i, \ldots, w_p)\ ,$$

$$(4) \qquad \vartheta((w)) = e^{2w_\nu + a_{\nu\nu}}\,\vartheta((w_\tau + a_{\tau\nu}))\ \ ;$$

questa seconda col cambiare nel termine generale della (1) m_ν in $m_\nu + 1$.

Esprimendo g_1 e g_2 numeri interi qualsiansi, invece delle (3)' possiamo scrivere la

$$(5)' \qquad \vartheta(w_1, w_2) = \vartheta(w_1 + g_1\pi i, w_2 + g_2\pi i)\ ,$$

ed invece della (3) la

$$(5) \qquad \vartheta((w)) = \vartheta((w + g\,\pi i))\ .$$

Esprimendo h_1 e h_2 pure due interi qualsiansi, invece

deile (4)′ possiamo scrivere la seguente, che le contiene come casi particolari ,

$$(6)' \quad \vartheta(w_1, w_2) = e^{2(h_1 w_1 + h_2 w_2) + a_{11} h_1^2 + 2 a_{12} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2} \times$$
$$\vartheta(w_1 + a_{11} h_1 + a_{12} h_2 \,,\, w_2 + a_{21} h_1 + a_{22} h_2) \,;$$

e la quale ottiensi cambiando nel termine generale della (1)′ m_1 e m_2 in $m_1 + h_1$ e $m_2 + h_2$, ed osservando la identità

$$a_{11}(m_1+h_1)^2 + 2a_{12}(m_1+h_1)(m_2+h_2) + a_{22}(m_2+h_2)^2$$
$$+2[\, w_1(m_1+h_1) + w_2(m_2+h_2)]$$
$$= a_{11} m^2_1 + 2a_{12} m_1 m_2 + a_{22} m^2_2$$
$$+2[(w_1 + a_{11} h_2 + a_{12} h_2) m_1 + (w_2 + a_{21} h_1 + a_{22} h_2) m_2]$$
$$+ a_{11} h_1^2 + 2a_{12} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2$$
$$+2[\, w_1 h_1 + w_2 h_2].$$

Cosi pure cambiando nel termine generale della (1) ogni indice m in $m + h$ ed osservando la identità

$$\varphi((m+h)) + 2\sum \; w_\mu \, (m_\mu + h_\mu)$$
$$= \varphi((m)) \quad + 2\sum \left(w_\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi((h))}{\partial h_\mu} \right) m_\mu$$
$$+ \varphi((h)) \quad + 2\sum \; w_\mu \, h_\mu \qquad ,$$

si avrà invece della (4) la seguente

$$(6) \qquad \vartheta((w)) = e^{2\sum h_\mu w_\mu + \varphi((h))} \, \vartheta((w_\tau + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi((h))}{\partial h_\tau}))$$
$$= e^{2\sum h_\mu w_\mu + \varphi((h))} \, \vartheta((w + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi((h))}{\partial h})) \,.$$

Cambiando nella (6)′ le due quantità w_1 e w_2 nelle $w_1 + g_1 \pi i$ e $w_2 + g_2 \pi i$; e nella (6) le p quantità w nelle $w + g \pi i$ si hanno le

$$(7)' \, \vartheta(w_1, w_2) = e^{2(h_1 w_1 + h_2 w_2) + a_{11} h_1^2 + 2a_{12} h_1 h_2 + a_{22} h_2^2} \times$$
$$\vartheta(w_1 + g_1 \pi i + a_{11} h_1 + a_{12} h_2 \,,\, w_2 + g_2 \pi i + a_{21} h_1 + a_{22} h_2)$$

$$(7) \qquad \vartheta((w)) = e^{2 \sum_1^p h_\mu w_\mu + \varphi((h))} \qquad \vartheta((w + g \pi i + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi((h))}{\partial h}))$$

che comprendono in sè entrambi i sistemi di proprietà (3) e (4).

A riguardo di queste proprietà faremo qui notare la seguente proposizione sebbene appartenente, come già dichiarammo, a genere di considerazioni riservato per le *Sezioni* successive. *Le* (3) *e* (4), *insieme colle condizioni di essere funzione monodroma continua e finita per tutti i valori finiti delle variabili* w, *determinano la* ϑ *sino ad un fattore costante.*

Infatti, primieramente, per forza delle dette condizioni e delle (3), la ϑ si potrà esprimere con una serie $p$upla procedente secondo le potenze intere positive e negative delle quantità e^{2w}. Ed invero, considerando la ϑ come dipendente dalla w_1, essa è funzione di w_1 monodroma continua e finita per ogni valor finito di w_1 e dotata del periodo πi; dunque può rappresentarsi colla serie

$$\sum_{m_1=-\infty}^{m_1=+\infty} a_{m_1} e^{2w_1 m_1} \qquad (*).$$

Ora considerando i coefficienti a_{m_1} nella loro dipendenza da w_2, essi sono sviluppabili in serie procedente secondo le potenze intere positive e negative di e^{2w_2}. I coefficienti di queste nuove serie sono sviluppabili secondo le potenze di e^{2w_3}; ecc. Dunque infine si avrà

$$\vartheta = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p A_{m_1 \dots m_p} e^{2\sum_1^p w_\mu m_\mu},$$

dove i coefficienti $A_{m_1 \dots m_p}$ non dipendono dalle w. A determinare questi coefficienti servono le (4). Cambiando infatti nel termine generale dell' ora ottenuta serie l' indice m_ν in $m_\nu + 1$ e confrontando il risultato col secondo membro della (4), si ha

$$\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p A_{m_1 \dots m_\nu + 1 \dots m_p} e^{2\sum w_\mu m_\mu + 2w_p}$$

$$= e^{2w_\nu + a_{\nu\nu}} \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p A_{m_1 \dots m_\nu \dots m_p} e^{2\sum (w_\mu + a_{\mu\nu}) m_\mu}.$$

(*) Si è già avvertito a pie' della pag. 305 che questa proposizione, del resto ben conosciuta, uscirà dimostrata più tardi.

La identità di queste due serie richiede che siano identici tra loro i coefficienti dei termini formati con le stesse potenze delle e^{2w}; quindi si ha la relazione generale

$$A_{m_1 \ldots m_\nu + 1 \ldots m_p} = A_{m_1 \ldots m_\nu \ldots m_p} \, e^{2\sum_1^p a_{\mu\nu} m_\mu + a_{\nu\nu}}$$

in virtù della quale tutti i coefficienti A restano determinati sino ad un fattor comune C. A questa relazione soddisfa la espressione

$$e^{\left(\sum_1^p\right)^2 a_{\mu\nu} m_\mu m_\nu} = e^{\varphi((m))}$$

e però sarà

$$A_{m_1 \ldots m_p} = C e^{\varphi((m))} .$$

C. D. D.

Le sunnominate proprietà della funzione ϑ potranno dunque assumersi come definizione della medesima invece della espressione analitica.

Ora dimostreremo, come già per la ϑ semplice, che *la* $\vartheta(w_1, w_2)$ *si annulla per tutti i valori di* w_1, w_2 *dati dalle due formole*

$$(8)' \quad \begin{cases} w_1 = \dfrac{1}{2}(g'_1 \pi i + h'_1 a_{11} + h'_2 a_{12}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{con } g'_1 h'_1 + g'_2 h'_2 \equiv 0 \pmod 2 \\ w_2 = \dfrac{1}{2}(g'_2 \pi i + h'_1 a_{21} + h'_2 a_{22}) \end{cases}$$

essendo g'_1, g'_2, h'_1, h'_2 *numeri interi*; e che *la* $\vartheta((w))$ *si annulla per tutti i valori delle* w *dati dalle* p *formole*

$$(8) \quad w = \frac{1}{2}\left(g' \pi i + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi((h'))}{\partial h'}\right) \text{ con } \sum g'_\mu h'_\mu \equiv 1 \pmod 2,$$

g', h' esprimendo $2p$ numeri interi.

Considerando a dirittura il caso generale, osserviamo che il valore della (1) non si altera se nel termine generale si

cambino gli indici m nei $-(m+h')$. Sommando la (1) così modificata colla (1) stessa si avrà

$$\vartheta((w)) = \frac{1}{2}\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p \left\{ e^{\varphi((m))+2\Sigma w_\mu m_\mu} + e^{\varphi((m+h'))-2\Sigma w_\mu (m_\mu + h'_\mu)} \right\}$$

Una espressione come $e^A + e^B$ si annulla quando A differisca da B d'un multiplo dispari di πi. Quindi la funzione ϑ riuscirà certamente nulla se la differenza

$$[\varphi((m)) + 2\,\Sigma\, w_\mu\, m_\mu] - [\varphi((m+h')) - 2\,\Sigma\, w_\mu\, (m_\mu + h'_\mu)]$$

sarà nulla per tutti i sistemi di valori degli indici m. Questa differenza, osservando la

$$\varphi((m+h')) = \varphi((h')) + \Sigma\, m_\mu \frac{\partial\, \varphi((h'))}{\partial\, h'_\mu}\, \varphi((m))$$

riducesi alla quantità

$$2\Sigma\, m_\mu \left(2w_\mu - \frac{1}{2}\frac{\partial\,\varphi((h'))}{\partial\, h'_\mu}\right) - \varphi((h')) + 2\,\Sigma\, w_\mu\, h'_\mu\,;$$

e determinando le w com'è espresso dalle p seguenti equazioni

$$2\,w - \frac{1}{2}\frac{\partial\,\varphi((h'))}{\partial\, h'} = g'\,\pi i\;;$$

ed osservando che è

$$\Sigma \frac{1}{2}\frac{\partial\,\varphi((h'))}{\partial\, h'_\mu} h'_\mu = \varphi((h')),$$

riducesi a quest'altra

$$2\,\Sigma\, m_\mu\, g'_\mu\, \pi i + \Sigma\, g'_\mu\, h'_\mu\, \pi i\;.$$

Essendo $2\,\Sigma\, m_\mu\, g'_\mu$ numero pari, la differenza riuscirà dunque un multiplo dispari di πi, qualunque sieno gli indici m, se i $2p$ interi g', h' renderanno

$$\Sigma\, g'_\mu\, h'_\mu \equiv 1 \pmod 2.$$

C. D. D.

Consideriamo ora i risultati che si hanno facendo crescere nella $\vartheta((w))$ le variabili di multipli fratti dei periodi, limitandoci però al caso del denominatore 2. E precisamente diamo

alle variabili incrementi quali vedonsi nel secondo membro della (7), ponendo però in luogo degli interi

$$g_1, \ldots, g_p\ ;\ h_1, \ldots, h_p$$

le frazioni

$$\frac{\varepsilon'_1}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon'_p}{2}\ ;\ \frac{\varepsilon_1}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon_p}{2}$$

dove le ε', ε significano numeri interi: cioè cambiamo nella (1) le quantità w nelle

$$w+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Avremo

$$\vartheta((w+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon}{2}}))=\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\varphi((m))+2\Sigma\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon_\mu}{2}}\right)m_\mu}.$$

Moltiplicando ambo i membri per

$$e^{\Sigma\varepsilon_\mu w_\mu+\Sigma\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}$$

e riflettendo alla identità

$$\varphi((m))+\sum m_\mu\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon_\mu}{2}}+\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))=\varphi((m+\frac{\varepsilon}{2})),$$

avremo

$$e^{\Sigma\varepsilon_\mu w_\mu+\Sigma\frac{\varepsilon_\mu\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}\vartheta((w+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon}{2}}))$$

$$=\left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\varphi((m+\frac{\varepsilon}{2}))+2\Sigma\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)}.$$

Questo secondo membro è una serie ϑ il cui termine generale si ottiene dal termine generale della (1) cambiando gli indici m negli $m + \frac{\varepsilon}{2}$ e gli argomenti w negli $w + \frac{\varepsilon'}{2}\pi i$. Perciò lo indicheremo con la scrittura $\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w))$ ovvero, se non sia necessario di mettere in evidenza i singoli valori delle ε, ε', anche più brevemente con $\vartheta[\varepsilon]((w))$, cioè riterremo

$$(9) \qquad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)) = \vartheta[\varepsilon]((w))$$

$$= \left(\sum_{-\infty}^{+\infty}\right)^p e^{\varphi((m+\frac{\varepsilon}{2})) + 2\sum\left(w_\mu + \frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)\left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)}$$

e chiameremo

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix} = [\varepsilon]$$

la *caratteristica* della funzione ϑ. Ciò premesso, la eguaglianza sopra ottenuta sarà

$$(10) \quad e^{\sum \varepsilon_\mu w_\mu + \sum \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}{2}\pi i + \varphi((\frac{\varepsilon}{2}))} \vartheta\left(\left(w + \frac{\varepsilon'}{2}\pi i + \frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon}{2}}\right)\right) = \vartheta[\varepsilon]((w)).$$

Nel caso di $p=1$ abbiamo visto che dalla (9), per valori interi di ε e ε', non scaturiscono fuorchè quattro funzioni distinte. Ora, analogamente, osserviamo che nel caso generale non scaturiscono fuorchè 2^{2p} funzioni distinte, bastando di dare alle $2p$ quantità ε, ε' i valori $0, 1$. Infatti il cambiare ε_ν in $\varepsilon_\nu \pm 2$ nel termine generale della (9) equivale al cambiare m_ν in $m_\nu \pm 1$, il che non altera il valore della serie. Dunque è

$$(12) \quad \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_\nu \pm 2 & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_\nu & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)) = \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_\nu & \cdots & \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 & \cdots & \varepsilon'_\nu & \cdots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)).$$

Il cambiare poi ε'_ν in $\varepsilon'_\nu \pm 2$ produce nell' esponente l' incremento $\pm 2\pi i\left(m_\nu + \frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)$, e quindi in ogni termine il fattore $(-1)^{\varepsilon_\nu}$: dunque

(13) $$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu & \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \pm 2 & \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)) = (-1)^{\varepsilon_\nu}\, \vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_\nu \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_\nu \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)).$$

Cerchiamo per le $\vartheta[\varepsilon]((w))$ le eguaglianze analoghe alle (2), (3), (4). Osservando che senza alterare il valore della (9) si possono cambiare nel suo termine generale gli $m + \frac{\varepsilon}{2}$ negli $-\left(m + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, e che questo cambiamento equivale al cambiare i w nei $-w$ e moltiplicare per

$$e^{-4\sum \frac{\varepsilon'_\mu}{2} \pi i \left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)} = (-1)^{\sum \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu},$$

si ha

(14) $$\vartheta[\varepsilon]((w)) = e^{\sum \varepsilon_\mu \varepsilon'_\mu}\, \vartheta[\varepsilon]((-w)).$$

È ovvia la

$$\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \dots \varepsilon_p \\ \varepsilon'_1 \dots \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)) = \vartheta\begin{bmatrix}-\varepsilon_1 \dots -\varepsilon_p \\ -\varepsilon'_1 \dots -\varepsilon'_p\end{bmatrix}((w)).$$

La (14) mostra che le funzioni ϑ sono o pari o dispari. Sono pari quelle per le quali $\Sigma\, \varepsilon\, \varepsilon'$ sia numero pari; dispari le altre. Designando con P_p il numero delle pari e con D_p quello delle dispari, determiniamo questi due numeri. Riflettendo che le 2^{2p} caratteristiche del caso p possono ottenersi unendo successivamente ad ognuna delle $2^{2(p-1)}$ caratteristiche del caso $p-1$ ciascuna delle coppie

$$\begin{matrix}0 \\ 0\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}0 \\ 1\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}1 \\ 0\end{matrix}\,,\quad \begin{matrix}1 \\ 1\end{matrix}\,,$$

e riflettendo come si modifichi con questa giunta il valore di $\Sigma\, \varepsilon \varepsilon'$, si trovano subito le

$$P_p = 3\, P_{p-1} + D_{p-1}\ ,\quad D_p = P_{p-1} + 3\, D_{p-1}\ ,$$

da cui

$$P_p + D_p = 4\,(P_{p-1} + D_{p-1})\ ,\quad P_p - D_p = 2\,(P_{p-1} - D_{p-1}).$$

Queste somministrano

$$P_p + D_p = 4^{p-1}\,(P_1 + D_1) = 4^p = 2^{2p}\ ,$$
$$P_p - D_p = 2^{p-1}\,(P_1 - D_1) = 2^p\ ,$$

da dove

$$P_p = \frac{1}{2}(2^{2p} + 2^p) = 2^{p-1}(2^p + 1) ,$$

$$D_p = \frac{1}{2}(2^{2p} - 2^p) = 2^{p-1}(2^p - 1) .$$

Nel caso $p = 2$, si ha $P_2 = 10$ e $D_2 = 6$. Le caratteristiche delle dieci funzioni pari sono

$$\begin{bmatrix}00\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}00\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\00\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\11\end{bmatrix},$$

quelle delle dispari sono

$$\begin{bmatrix}01\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}01\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}10\\11\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\01\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}11\\10\end{bmatrix} .$$

La eguaglianza analoga della (3), cambiando nella (9) la w_ν in $w_\nu + \pi i$, si vede essere

$$(15) \qquad \vartheta[\varepsilon]((w)) = (-1)^{\varepsilon_\nu} \vartheta[\varepsilon](w_1, \ldots, w_\nu + \pi i, \ldots, w_p) .$$

Come analoga della (4), cambiando nel termine generale della (9) m_ν in $m_\nu + 1$ ed osservando che

$$\varphi\left(m_1 + \frac{\varepsilon_1}{2}, \ldots, m_\nu + 1 + \frac{\varepsilon_\nu}{2}, \ldots, m_p + \frac{\varepsilon_p}{2}\right)$$

$$= \varphi((m + \frac{\varepsilon}{2})) + \frac{\partial \varphi((m + \frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\left(m_\nu + \frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi((m + \frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\left(m_\nu + \frac{\varepsilon_\nu}{2}\right)^2}$$

$$= \varphi((m + \frac{\varepsilon}{2})) + + 2 \sum_\mu a_{\mu\nu}\left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right) + a_{\nu\nu} ,$$

si ha

$$(16) \qquad \vartheta[\varepsilon]((w)) = (-1)^{\varepsilon'_\nu} e^{2w_\nu + a_{\nu\nu}} \vartheta[\varepsilon]((w_\tau + a_{\tau\nu})) .$$

Mediante l' identità

$$\varphi((m + h + \frac{\varepsilon}{2})) = \varphi((m + \frac{\varepsilon}{2})) + \sum\left(m_\mu + \frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\frac{\partial \varphi((h))}{\partial h_\mu} + \varphi((h))$$

o, più compiutamente, mediante la

$$\begin{aligned}
&\varphi((m+h+\tfrac{\varepsilon}{2}))+2\sum\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i\right)\left(m_\mu+h_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\\
&=\varphi((m+\tfrac{\varepsilon}{2})) \qquad +2\sum\left(w_\mu+\frac{\varepsilon'_\mu}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((h))}{\partial h_\mu}\right)\left(m_\mu+\frac{\varepsilon_\mu}{2}\right)\\
&+\varphi((h)) \qquad\qquad +2\sum w_\mu h_\mu+\sum\varepsilon'_\mu h_\mu
\end{aligned}$$

si ha tosto l'eguaglianza analoga della (6), e quindi, come analoga della (7), la

$$(17)\qquad \vartheta[\varepsilon]((w))=(-1)^{\sum(g_\mu\varepsilon_\mu+h_\mu\varepsilon'_\mu)}e^{2\sum h_\mu w_\mu+\varphi((h))}\times \vartheta[\varepsilon]((w+g\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((h))}{\partial h_\mu})).$$

Osservando le (8) e (10) si vede che per tutti i valori degli argomenti w ricavabili dalle p eguaglianze

$$(18)\qquad w+\frac{\varepsilon'}{2}\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((\frac{\varepsilon}{2}))}{\partial\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{1}{2}\left(g'\pi i+\frac{1}{2}\frac{\partial\varphi((h'))}{\partial h'}\right)$$

$$\text{con } \sum g'_\mu h'_\mu\equiv 1 \pmod 2,$$

la $\vartheta[\varepsilon]((w))$ si annulla.

Un quoziente di due funzioni $\vartheta[\varepsilon]((w))$ rappresenta una funzione delle n variabili w ad un solo valore e continua per tutti i sistemi di valori finiti delle variabili e dotata dei $2n$ sistemi di periodi o semiperiodi (*) simultanei

(*) La (15) avverte che per un quoziente come

$$\frac{\vartheta[\varepsilon]((w))}{\vartheta[\eta]((w))}=\frac{\vartheta\begin{bmatrix}\varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_p\\ \varepsilon'_1 & \dots & \varepsilon'_p\end{bmatrix}((w))}{\vartheta\begin{bmatrix}\eta_1 & \dots & \eta_p\\ \eta'_1 & \dots & \eta'_p\end{bmatrix}((w))}$$

πi sarà periodo relativamente alla variabile w_ν se sarà $\varepsilon_\nu\equiv\eta_\nu \pmod 2$; non verificandosi questa condizione il periodo sarà $2\pi i$. Analogamente la (16) avverte che

$$a_{1\nu},\ a_{2\nu},\ \dots,\ a_{p\nu}$$

sarà un sistema di periodi simultanei se sarà $\varepsilon'_\nu\equiv\eta'_\nu \pmod 2$; un sistema di semi-periodi nel caso contrario.

w_1	w_2	.	.	w_p
πi	0	.	.	0
0	πi	.	.	0
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
0	0	.	.	πi
a_{11}	a_{21}	.	.	a_{p1}
a_{12}	a_{22}	.	.	a_{p2}
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
a_{1p}	a_{2p}	.	.	a_{pp} .

Riguardo ai periodi πi i quozienti, come le ϑ stesse, possono anche dirsi periodici rispetto a ciascuna variabile separatamente.

Nel caso $p=2$ le sedici funzioni $\vartheta\left[\begin{smallmatrix}\epsilon_1 & \epsilon_2 \\ \epsilon'_1 & \epsilon'_2\end{smallmatrix}\right](w_1, w_2)$ danno luogo a quindici quozienti che riconosceremo siccome le espressioni delle funzioni iperellitiche del primo ordine date da Göpel e dal sig. Rosenhain (*Notizie*, pag. 54-55). Per p qualunque, colle ϑ si ponno ancora analogamente formare le espressioni delle funzioni iperellitiche di un ordine qualunque, e, più in generale, le espressioni di funzioni abeliane qualsiansi; però, se p supera 3, s'impiegherà una particolare specie di funzioni ϑ; cioè funzioni ϑ per le quali hanno luogo speciali relazioni fra le $\frac{p(p+1)}{2}$ quantità $a_{\mu\nu}$.

CAPITOLO TERZO

Prodotti infiniti.

§. 62. Riservando la considerazione degli integrali per l'ultimo capitolo della corrente *Sezione*, prendiamo ora ad esaminare i prodotti infiniti.

Come per una somma semplicemente infinita

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \text{ecc.}$$

la convergenza ed il valore si desumono dalla somma di un numero finito crescente di primi termini, così per un prodotto semplicemente infinito

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3 \cdot \text{ecc.},$$

la convergenza ed il valore si desumono dalla considerazione del prodotto di un numero finito crescente di primi fattori. Il prodotto dei primi m fattori sia espresso con

$$P_m = Q_1 \cdot Q_2 \cdot \ldots \cdot Q_m .$$

Come si è già detto in generale (§ 46) al crescere di m possono presentarsi tre casi: 1. P_m tendere ad un limite finito P, nel qual caso il prodotto dicesi convergente e di valore P; 2. P_m prendere valori finiti ma diversi a seconda del valore di m, nel qual caso il prodotto dicesi indeterminato; 3. P_m crescere infinitamente, nel qual caso il prodotto dicesi divergente.

Una condizione necessaria, non però sufficiente, per la convergenza si è che Q_m tenda a 1 al crescere di m. Se ciò non avvenisse, l'aggiunta di ogni nuovo fattore altererebbe di una quantità finita il risultato della moltiplicazione dei fattori precedenti, e non potrebbe esservi un limite determinato. Perciò potremo porre

$$Q_m = 1 + \mathfrak{Q}_m ,$$

essendo $\mathfrak{Q}_m$ una quantità che tende a zero col crescere di m, e considerare i prodotti sotto la forma

$$P=(1+\mathfrak{Q}_1)\ldots(1+\mathfrak{Q}_m)\ldots$$

La investigazione della convergenza ed altre ricerche sui prodotti infiniti si possono far dipendere da analoghe ricerche relative a serie.

Supponendo, in prima, le quantità $\mathfrak{Q}$ tutte reali e dello stesso segno, e prendendo i logaritmi naturali reali dei due membri della

$$P_m=(1+\mathfrak{Q}_1)\ldots.(1+\mathfrak{Q}_m),$$

si può scrivere la eguaglianza

$$l\,P_m=\mathfrak{Q}_1\frac{l(1+\mathfrak{Q}_1)}{\mathfrak{Q}_1}+\ldots+\mathfrak{Q}_m\frac{l(1+\mathfrak{Q}_m)}{\mathfrak{Q}_m},$$

della quale il secondo membro dà una serie convergente insieme colla

$$\mathfrak{Q}_1+\ldots.+\mathfrak{Q}_m+\ldots;$$

perchè i moltiplicatori dei termini $\mathfrak{Q}$ cioè le quantità

$$\frac{l(1+\mathfrak{Q}_1)}{\mathfrak{Q}_1},\ldots.,\frac{l(1+\mathfrak{Q}_m)}{\mathfrak{Q}_m},\ldots$$

tendono, in forza della $\lim \mathfrak{Q}_m=0$, all' unità. Perciò dalla convergenza della serie

$$\mathfrak{Q}_1+\mathfrak{Q}_2+\ldots+\mathfrak{Q}_m+\ldots$$

si desumerà la convergenza di lP_m ossia del prodotto P_m.

Per esempio il prodotto

$$\left(1-\frac{x^2}{1^2}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{m^2}\right)\ldots$$

è convergente, qualunque sia il valor finito della variabile reale x, perchè tale è la serie

$$-\frac{x^2}{1^2}-\ldots-\frac{x^2}{m^2}-\ldots$$

ossia la

$$\frac{1}{1^2}+\ldots+\frac{1}{m^2}+\ldots\quad.$$

Invece il prodotto

$$\left(1-\frac{x}{1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{x}{m}\right)\ldots$$

è divergente per x negativa e zero per x positiva, essendo divergente la serie

$$\frac{1}{1}+\ldots+\frac{1}{m}+\ldots.$$

Ma passiamo a dirittura al caso di prodotti infiniti complessi, cioè dire di prodotti in cui le quantità $\mathbf{Q}$ sieno complesse. È facile riconoscere che, se il prodotto reale

$$(1+\bmod\mathbf{Q}_1)\ldots\ldots(1+\bmod\mathbf{Q}_m)\ldots$$

è convergente o, ciò che torna lo stesso, se è convergente la serie

$$\bmod\mathbf{Q}_1+\ldots+\bmod\mathbf{Q}_m+\ldots,$$

è pure convergente il prodotto

$$(1+\mathbf{Q}_1)\ldots.(1+\mathbf{Q}_m)\ldots$$

Se il prodotto fosse della forma

$$\left(1-\frac{z}{\varpi_1}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{z}{\varpi_m}\right)\ldots,$$

la esposta proposizione darebbe certezza che il prodotto sarebbe convergente ove fosse convergente la serie

$$\bmod\frac{1}{\varpi_1}+\ldots.+\bmod\frac{1}{\varpi_m}+\ldots\quad.$$

Ma vogliamo penetrare un po' più addentro nelle condizioni di convergenza di simili prodotti, in modo da poter talvolta avere certezza che la medesima abbia luogo, senza sapere che converga od anche sapendo che diverga la precedente serie di moduli.

Però, invece di persistere nella esclusiva contemplazione di un prodotto, come il precedente, semplicemente infinito ed

estendentesi in un solo senso, abbraccieremo qualsia prodotto di fattori della forma $1 - \frac{z}{\varpi}$, che designeremo con

$$\Pi\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right). \tag{1}$$

Questi prodotti, che, ove il numero dei fattori fosse finito, esprimerebbero funzioni di z razionali intere decomposte nei proprî fattori lineari, sono della massima importanza.

Designiamo con

$$\overset{N}{\Pi}\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right) \tag{2}$$

il prodotto finito, composto di N fattori (§ 46), dal quale il prodotto (1) vuol supporsi proveniente. Prendendo un logaritmo di ogni fattore, la somma di questi N logaritmi è certamente un logaritmo del prodotto (*). Prenderemo i logaritmi *principali* dei fattori (**) e, abbiasi o no nella loro somma il principale tra i logaritmi del prodotto, scriveremo

$$l\overset{N}{\Pi}\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right) = \overset{N}{\Sigma}\, l\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right). \tag{3}$$

(*) Pel detto a pagg. 162-163 e pel convenuto nel §. 15 circa il valore da prendersi costantemente come argomento della base nella espressione di un logaritmo naturale, è affatto chiaro sussistere perfettamente, nel senso dichiarato per la $\phi = \psi'$ nelle pagine so citate, una eguaglianza come

$$l(Q_1\, Q_2\, .\,.\,.\, Q_m) = lQ_1 + lQ_2 + .\,.\,.\, lQ_m.$$

(**) Adottondo l' epiteto del sig. Björling, per logaritmo (naturale) *principale* di una quantità intendiamo con Cauchy (vedi la nota a pag. 165) quello pel quole il coefficiente di i è l' argomento principale dello quantità, cioè l' argomento compreso fra $-\pi$ e $+\pi$.

Nel coso di una quantità dello forma $1 + \mathbf{Q}$, ove sia mod $\mathbf{Q} < 1$, il logaritmo principale può esprimersi (§. 73) colla serie $\mathbf{Q} - \frac{\mathbf{Q}^2}{2} + \frac{\mathbf{Q}^3}{3} -$ ecc., che si annulla con $\mathbf{Q}$ appunto come il logaritmo principale.

Infine possiamo anche notare che, riuscendo mod $\left[(1 + \mathbf{Q}_1)(1 + \mathbf{Q}_2)\ldots(1 + \mathbf{Q}_r) - 1\right] < 1$ per $r = 1, 2, \ldots, m$, la somma dei logaritmi principali dei fattori del prodotto $(1 + \mathbf{Q}_1)(1 + \mathbf{Q}_2)\ldots(1 + \mathbf{Q}_m)$ darà il logoritmo principale di esso prodotto.

Consideriamo ora il termine qualunque $l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$ della somma formante il secondo membro. Se si suppone $\operatorname{mod}\frac{z}{\varpi}<1$, si può sviluppare questo logaritmo, essendo principale, nella serie

$$l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)=-\frac{z}{\varpi}-\frac{z^2}{2\varpi^2}-\frac{z^3}{3\varpi^3}-\frac{z^4}{4\varpi^4}-\dots$$

convergente anche riducendone i termini ai moduli rispettivi. Raccogliendo $\frac{z^3}{\varpi^3}$ si ha

$$l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)=-\frac{z}{\varpi}-\frac{z^2}{2\varpi^2}-\frac{z^3}{\varpi^3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{z}{\varpi}+\dots\right).$$

Ma, poichè il modulo di una somma è minore od al più eguale alla somma dei moduli, si ha

$$\operatorname{mod}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{z}{\varpi}+\dots\right)<\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}+\frac{1}{5}\left(\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}\right)^2+\dots$$

$$<\frac{1}{3}\left[1+\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}+\left(\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}\right)^2+\dots\right]=\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}}.$$

Se ora si suppone non soltanto $\operatorname{mod}\frac{z}{\varpi}<1$ ossia $\operatorname{mod}\varpi>\operatorname{mod} z$, ma

$$(4)\qquad \frac{2}{3}\operatorname{mod}\varpi>\operatorname{mod} z\ ,$$

si avrà

$$\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{\operatorname{mod} z}{\operatorname{mod}\varpi}}<1\ ,$$

e quindi

$$(5)\qquad l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)=-\frac{z}{\varpi}-\frac{z^2}{2\varpi^2}-\frac{z^3}{\varpi^3}\eta\ ,$$

dove η significa un numero complesso a modulo minore dell'unità, del cui valore, dipendente da z e da ϖ, pel nostro scopo non occorre ulteriore determinazione.

Al fine di poter usare per tutti i fattori del prodotto infinito di questa utile trasformazione, escluderemo d'ora innanzi da esso prodotto tutti quei fattori pei quali non fosse soddisfatta la condizione (4), ed indicheremo il nuovo prodotto che se ne ha con

(1)' $$\Pi'\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$$

ed il prodotto finito che si ha invece del (2) con

(2)' $$\overset{N}{\Pi'}\left(1-\frac{z}{\varpi}\right).$$

Investigare la convergenza del prodotto (1) torna lo stesso che investigare la convergenza del prodotto (1)', se il numero dei fattori esclusi sia finito. Ora, questo numero, se z sia finita e le quantità ϖ rappresentate (nella solita maniera sul piano) da punti a distanze non infinitesime tra loro, sarà infatti finito; imperocchè, entro il cerchio di centro 0 e di raggio $\frac{3}{2}\operatorname{mod} z$ non potrà mai trovarsi una infinità di punti ϖ. Ammesso pertanto che le distanze tra i punti ϖ non siano infinitesime, invece della (3) considereremo la

(3)' $$l\overset{N}{\Pi'}\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)=\overset{N}{\Sigma'}\, l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$$

ed, applicando ad ogni termine del secondo membro la trasformazione (5), otterremo la eguaglianza

(6) $$l\overset{N}{\Pi'}\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)=-z\overset{N}{\Sigma'}\frac{1}{\varpi}-\frac{z^2}{2}\overset{N}{\Sigma'}\frac{1}{\varpi^2}-z^3\overset{N}{\Sigma'}\frac{\eta}{\varpi^3},$$

in cui l'ordine col quale al crescere di N intendonsi sommati i termini di ciascuna delle tre serie del secondo membro è lo stesso di quello col quale intendonsi moltiplicati i corrispondenti fattori del prodotto. Da qui emerge che: se le serie

(7) $$\Sigma\frac{1}{\varpi},\quad \Sigma\frac{1}{\varpi^2},\quad \Sigma\frac{\eta}{\varpi^3}$$

saranno tutte tre convergenti, sarà convergente anche il pro-

dotto infinito; se qualcuna di esse sarà indeterminata, sarà pure indeterminato il prodotto; se qualcuna sarà divergente, il prodotto sarà divergente o nullo. E però, la convergenza di tutte tre le serie (7) è condizione necessaria e sufficiente perchè, qualunque sia il valor finito di z, il prodotto (1)' riesca convergente e diverso da zero.

Se si riflette che, stante la condizione $\mathrm{mod}\frac{z}{\varpi} < 1$ ed a maggior ragione stante la (4), ogni termine $l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$ della serie fornita dal secondo membro della (3)' si comporta qual funzione monodroma continua e finita di z, si conchiuderà, per l'asserzione 1 del teorema del § 49, che similmente comportasi la somma della serie, cioè dire il logaritmo del prodotto (1)', e quindi il prodotto stesso.

Moltiplicando il prodotto (1)' pel numero limitato di fattori lineari $1-\frac{z}{\varpi}$ esclusi, non cessano di sussistere le notate proprietà; però il prodotto riuscirà nullo, se sia nullo qualcuno di questi fattori, cioè se z prenda come valore particolare uno dei numeri ϖ. Possiamo riassumere il sin qui detto circa il prodotto (1) enunciando il seguente

Teorema. *Se le serie* (7) *sono convergenti, il prodotto* (1) *esprime una funzione di z a un valore e continua e finita per ogni valor finito di z e nulla per tutti e soli i valori di z dati dalla formola* $z=\varpi$.

Potremo pertanto asserire talvolta la convergenza del prodotto (1) anche non essendo convergente la serie dei moduli delle quantità $\frac{1}{\varpi}$, bastando che converga la serie delle quantità stesse insieme colle altre due serie (7).

Se le serie (7) saranno convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispettivi, ossia, se la convergenza ed il valore loro saranno indipendenti dall' ordine dei termini, anche la convergenza ed il valore del prodotto (1) saranno indipen-

denti dall' ordine dei fattori. Se, per contrario, qualcuna delle serie non riuscirà convergente che sommando i termini in ordine opportuno, e cambierà di valore al cambiare di quest'ordine, anche il prodotto non riuscirà convergente che moltiplicando i fattori in ordine opportuno, e cambierà di valore al cambiare dell' ordine di moltiplicazione dei medesimi.

§. 63. Nel § precedente abbiamo ammesso che le quantità ϖ, finchè finite, fossero rappresentate da punti a distanze non infinitesime tra loro; ora vogliamo altresì ammettere che di tutte le distanze fra i punti ϖ si possa assegnare un comune limite inferiore e più grande di zero; e, richiamando quanto abbiamo detto nel §. 13 circa i possibili gradi di infinità di cui siffatti sistemi di quantità sono suscettibili, vogliamo da qui innanzi considerare separatamente il caso di una infinità semplice da quello di una infinità doppia.

Supponiamo dunque, in primo luogo, che si tratti di un sistema semplicemente infinito di quantità ϖ, cioè dire di un prodotto

(1) $$\Pi\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right)$$

semplicemente infinito. In tal caso il teorema della pag. 277 dichiara, senz' altro, che la seconda e la terza delle serie (7) del § precedente sono convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispettivi (*). La convergenza del prodotto sarà dunque a desumersi puramente dalla convergenza della serie

(2) $$\Sigma \frac{1}{\varpi}.$$

Se questa serie per opportuno ordinamento dei termini riuscisse convergente, e poi per un' alterazione nel medesimo, pur restando convergente, crescesse della quantità A nel proprio valore; il prodotto, convergente sì prima che poi, pren-

(*) Quanto alla terza, il teorema propriamente dichiara la convergenza della serie $\Sigma \frac{1}{\text{mod}\, \varpi^2}$. Ma a maggior ragione sarà convergente la $\Sigma \frac{\text{mod}\, \eta}{\text{mod}\, \varpi^2}$, poichè $\text{mod}\, \eta < 1$.

derebbe, per effetto della alterazione, come emerge dalla (6) del § precedente, il fattore avente per logaritmo naturale $-zA$. E però possiamo enunciare il seguente

Teorema. *Moltiplicando un significato particolare (cioè corrispondente ad un particolare ordinamento di fattori) di un prodotto semplicemente infinito della forma* (1) *pel fattore esponenziale*

$$e^{-zA},$$

essendo A rispetto a z una costante arbitraria, si ottiene una formola che comprende in se tutti quanti i significati che il prodotto stesso può assumere per alterazioni nell' ordine dei fattori.

Se le quantità ϖ saranno a due a due di contrario valore, ossia, se i punti ϖ saranno a due a due disposti simmetricamente rispetto al punto 0, la serie (2) riuscirà convergente ed avrà zero per valore ove ad ogni termine $\frac{1}{\varpi}$ si faccia tosto seguire il termine di contrario valore $\frac{1}{-\varpi}$. E però abbiamo il seguente

Teorema. *Dato un sistema semplicemente infinito di quantità ϖ, a due a due di valor contrario, si può sempre formare un prodotto infinito con i soli fattori lineari $1-\frac{z}{\varpi}$, che esprima una funzione di z a un valore e continua e finita per qualunque valor finito di z e nulla per tutti e soli i valori di z dati dalla formola $z=\varpi$.*

Se le quantità ϖ avessero a due a due per somma non 0 ma $2c$, ossia, se i punti ϖ fossero nel piano z a due a due disposti simmetricamente rispetto al punto c, trasportando la origine in questo punto, ritorneremo nelle condizioni del teorema ora enunciato; laonde saremmo certi della convergenza del prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{z-c}{\varpi-c}\right)=\Pi\frac{1-\frac{z}{\varpi}}{1-\frac{c}{\varpi}}\,.$$

Ma è anche facile persuadersi che, succedendo ad ogni termine come $\frac{1}{\varpi}$ un termine come $\frac{1}{2c-\varpi}$, la serie (2) riesce ancora convergente (*); dunque riesce pure ancora convergente il prodotto formato con i soli fattori $1-\frac{z}{\varpi}$, cioè la espressione

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\varpi}\right).$$

Non volendo supporre nulla di particolare in un dato sistema semplicemente infinito di quantità ϖ, non possiamo dire nulla di preciso circa l' ordine in cui sarebbero da imaginarsi moltiplicati i fattori $1-\frac{z}{\varpi}$ per avere un prodotto convergente. Però, accontentandoci di formare un prodotto non coi puri fattori $1-\frac{z}{\varpi}$, ma con questi e con fattori esponenziali della forma e^{-zA}, i quali del resto non si annullano nè diventano infiniti per nessun valore finito di z, abbiamo il

Teorema. *Dato un sistema semplicemente infinito di quantità*

(*) Riunendo i termini a due a due in uno solo, come termine generale della serie si avrà

$$\frac{1}{\varpi}+\frac{1}{2c-\varpi}=\frac{-2c}{1-\frac{2c}{\varpi}}\,\frac{1}{\varpi^2}.$$

Escludendo dalla serie i termini corrispondenti a quantità ϖ di modulo minore d' un numero fisso R, che per R finito sono in numero finito, si avrà

$$\operatorname{mod}\left(1-\frac{2c}{\varpi}\right)>1-\operatorname{mod}\frac{2c}{\varpi}>1-\frac{\operatorname{mod}2c}{R}.$$

Dunque la serie

$$\Sigma\operatorname{mod}\left(\frac{1}{\varpi}+\frac{1}{2c-\varpi}\right)=\Sigma\frac{\operatorname{mod}2c}{\operatorname{mod}\left(1-\frac{2c}{\varpi}\right)}\operatorname{mod}\frac{1}{\varpi^2}$$

avrà i suoi termini rispettivamente minori dei termini della

$$\Sigma\frac{\operatorname{mod}2c}{1-\frac{\operatorname{mod}2c}{R}}\operatorname{mod}\frac{1}{\varpi^2}=\frac{\operatorname{mod}2c}{1-\frac{\operatorname{mod}2c}{R}}\Sigma\operatorname{mod}\frac{1}{\varpi^2},$$

che sappiamo essere convergente.

ϖ, si può sempre formare un prodotto infinito coi fattori lineari $1-\frac{z}{\varpi}$ e coi fattori esponenziali $e^{z\,l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)}$ (dove i logaritmi sottintendonsi principali), che esprima una funzione di z a un valore e continua e finita per qualunque valor finito di z e nulla per tutti e soli i valori di z dati dalla formola $z=\varpi$.

Infatti il prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)e^{z\,l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)}$$

sarà convergente se sia convergente il secondo membro della

$$\Sigma\, l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)+z\,\Sigma\, l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)$$

$$=-\frac{z^2}{2}\Sigma\frac{1}{\varpi^2}-z^3\Sigma\frac{\eta}{\varpi^3}-\frac{z}{2}\Sigma\frac{1}{\varpi^2}+z\Sigma\frac{\eta'}{\varpi^3},$$

in cui η' significa rispetto a $l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)$ ciò che η rispetto a $l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$. Ora ciascuna delle quattro parti del secondo membro è serie convergente, come sappiamo, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi.

§. 64. Supponiamo, ora, che si tratti di un sistema doppiamente infinito di quantità ϖ, cioè dire di un prodotto

$$(1)\qquad \Pi\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$$

doppiamente infinito. In questo caso il teorema della pag. 284 dichiara che la terza delle serie (7) del §. 62 è convergente anche riducendone i termini ai moduli rispettivi; per cui la convergenza del prodotto sarà da desumersi soltanto dalla convergenza delle prime due

$$(2)\qquad \Sigma\frac{1}{\varpi}\ ,\ \Sigma\frac{1}{\varpi^2}.$$

Se queste serie per un ordinamento dei termini riuscis-

sero convergenti, e per un altro ordinamento riuscendo ancora convergenti variassero però di A e B nei rispettivi valori ; il prodotto prenderebbe nel secondo ordinamento in confronto del primo il fattore avente per logaritmo naturale

$$-zA-\frac{z^2}{2}B\ .$$

E però possiamo enunciare il seguente

Teorema. *Moltiplicando un significato particolare di un prodotto doppiamente infinito della forma* (1) *pel fattore esponenziale*

$$e^{-zA-\frac{z^2}{2}B}\ ,$$

essendo A e B rispetto a z costanti arbitrarie, si ottiene una formola che comprende in se tutti quanti i significati che il prodotto stesso può assumere per alterazioni nell' ordine dei fattori.

Abbiamo anche i teoremi analoghi al secondo e al terzo esposti pei prodotti semplicemente infiniti (*). Eccoli :

Teorema. *Dato un sistema doppiamente infinito di quantità ϖ, rappresentato da punti disposti a quattro a quattro nei vertici di quadrati aventi il centro nel punto* 0, *si può sempre formare un prodotto infinito con i soli fattori* $1-\frac{z}{\varpi}$, *che esprima una funzione di z a un valore e continua e finita per qualunque valor finito di z e nulla per tutti e soli i valori di z dati dalla formola $z=\varpi$.*

Infatti, giusta la supposta distribuzione, per ogni valore di ϖ esprimibile con $Re^{\Omega i}$ ve ne saranno tre esprimibili con

$$-Re^{\Omega i},\ Re^{\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)i}\ ,\ -Re^{\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)i}\ ;$$

e per ogni valore di ϖ^2 esprimibile con $R^2e^{2\Omega i}$ ve ne saranno tre esprimibili con

$$R^2\,e^{2\Omega i}\ ,\ -R^2\,e^{2\Omega i}\ ,\ -R^2\,e^{2\Omega i}\ .$$

(*) Questi due teoremi, non che i loro analoghi, sono dati nella citata (pag. 139) *Teorica delle funzioni ellittiche* del sig. Betti.

Se dunque nel prodotto i fattori si imaginano presi in modo che si succedono sempre i valori di ϖ delle quattro forme

$$Re^{\Omega i}\,,\ -Re^{\Omega i}\,,\ Re^{\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)i}\,,\ -Re^{\left(\Omega+\frac{\pi}{2}\right)i}\,,$$

lo stesso avverrà pei termini delle serie (2), le quali perciò riusciranno convergenti e di valore nullo. *C. D. D.*

Se il centro dei quadrati su nominati fosse, non nel punto O, ma nel punto c, dal teorema discenderebbe subito la convergenza del prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{z-c}{\varpi-c}\right)=\Pi\frac{1-\frac{z}{c}}{1-\frac{c}{\varpi}}.$$

Ma è anche tosto riconosciuto, mediante la convergenza della $\sum \bmod \frac{1}{\varpi^3}$, che le (2) convergono anche in questa nuova supposizione: dunque riesce pure ancora convergente il prodotto formato con i soli fattori $1-\frac{z}{\varpi}$, cioè la espressione

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\varpi}\right).$$

Teorema. *Dato un sistema doppiamente infinito di quantità ϖ, si può sempre formare un prodotto infinito coi fattori lineari $1-\frac{z}{\varpi}$ e coi fattori esponenziali $e^{z\,l\left[\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)\right]+z^2 l\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)}$ (dove i logaritmi sottintendonsi principali), che esprima una funzione di z a un valore e continua e finita per qualunque valore finito di z e nulla per tutti e soli i valori di z dati dalla formola $z=\varpi$.*

Infatti il prodotto

$$\Pi\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)e^{z\,l\left[\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)\right]+z^2 l\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)}$$

sarà convergente se sia convergente il secondo membro della

$$\sum l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)+z\sum l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)+z\sum l\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)+z^2\sum l\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)$$
$$=-z^3\sum\frac{\eta}{\varpi^3}+z\sum\frac{\eta'}{\varpi^3}-\frac{z}{8}\sum\frac{1}{\varpi^4}+\frac{z}{8}\sum\frac{\eta''}{\varpi^6}-\frac{z}{8}\sum\frac{1}{\varpi^4}+\frac{z^2}{8}\sum\frac{\eta''}{\varpi^6},$$

in cui η' e η'' significano rispetto a $l\left(1+\frac{1}{\varpi}\right)$ e $l\left(1+\frac{1}{2\varpi^2}\right)$ ciò che η rispetto a $l\left(1-\frac{z}{\varpi}\right)$. Ora ciascuna delle sei parti del secondo membro è serie convergente, come sappiamo, anche riducendone i termini ai moduli rispettivi.

§. 65. Anche fra i prodotti infiniti vogliamo fermarci a considerare quelli pei quali riesce attuata ed in evidenza la periodicità. Ciò che si è visto a riguardo delle serie suggerisce tosto, come il più semplice da considerarsi fra i prodotti semplicemente infiniti, il tipo

$$\prod_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} Q(z-\mu a),$$

e fra i prodotti doppiamente infiniti, il tipo

$$\prod_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty}\ \prod_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty} Q(z-\mu a-\nu b),$$

μ e ν esprimendo indici che debbano percorrere tutta la serie dei numeri interi.

Nel primo tipo

(1) $\ldots Q(z+2a)\,Q(z+a)\,Q(z)\,Q(z-a)\,Q(z-2a)\ldots,$

cambiando z in $z+a$, si produce lo stesso effetto che spingendo innanzi di un posto verso sinistra ciascun fattore. Sia

$$\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m} Q(z-\mu a)$$

il prodotto finito dal quale, col crescere di m e m', si intende scaturire il prodotto infinito. Il cambiarvi z in $z+a$ vale come moltiplicarlo pel quoziente

$$\frac{Q(z+m'a+a)}{Q(z-ma)}.$$

Se i singoli fattori Q tendessero all' unità sì verso destra che verso sinistra, il limite di questo quoziente sarebbe l'unità, ed il prodotto infinito ammetterebbe il periodo a. Però in un prodotto, quale l' (1), estendentesi nei due sensi, la convergenza non esige necessariamente che i singoli fattori tendano all'unità, come quando il prodotto si estende soltanto verso destra o verso sinistra; e per la periodicità basta che sia 1 il limite del quoziente, comunque si comportino il numeratore ed il denominatore.

Il secondo tipo serve per la doppia periodicità; la quale troverebbesi attuata, ma non in totale evidenza, anche in un prodotto semplicemente infinito giusta il primo tipo, ove la funzione $Q(z)$ ammettesse già essa un periodo b.

Ma abbandoniamo le generalità e scendiamo ai casi particolari che si hanno supponendo ai fattori del prodotto la forma dei fattori semplici delle funzioni razionali. Ponendo

$$Q(z) = z - c \quad \text{ovvero} \quad Q(z) = 1 - \frac{z}{c}$$

non otterremmo un prodotto convergente, perchè i fattori

$$z - \mu a - c \quad \text{ovvero} \quad 1 - \frac{z - \mu a}{c}$$

tenderebbero all' infinito con μ sì a destra che a sinistra. Perciò, deviando un poco dal tipo (1), prenderemo come fattore generale la quantità

$$-\frac{z - \mu a - c}{\mu a + c} = 1 - \frac{z}{\mu a + c},$$

che al crescere di μ tende a 1.

Però invece del prodotto

$$(2) \qquad \Pi\left(1 - \frac{z}{\mu a + c}\right)$$

possiamo anche soltanto considerare quello che corrisponde a $c = 0$, cioè

$$(3) \Pi\left(1 - \frac{z}{\mu a}\right) = \ldots\left(1 + \frac{z}{2a}\right)\left(1 + \frac{z}{a}\right) z \left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{z}{2a}\right)\ldots,$$

(dove, come si vede, per $\mu = 0$ s' imagina il fattore z invece del simbolo $1 - \frac{z}{0}$); imperocchè la determinazione della convergenza e del valore del prodotto (2) può farsi dipendere dalla stessa determinazione pel prodotto (3).

Ed invero, mentre non potrebbesi separare l' uno dall' altro i termini del quoziente

$$\frac{\mu a + c - z}{\mu a + c}$$

per costituire i fattori generali di due prodotti, ben lo si può, se prima si dividano entrambi per μa. Dalla identità

$$1 - \frac{z}{\mu a + c} = \frac{1 - \frac{z - c}{\mu a}}{1 - \frac{-c}{\mu a}}$$

e, per $\mu = 0$, dalla

$$1 - \frac{z}{c} = \frac{z - c}{-c},$$

si deduce, finchè m e m' restano finiti,

$$\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m} \left(1 - \frac{z}{\mu a + c}\right) = \frac{\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m} \left(1 - \frac{z - c}{\mu a}\right)}{\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m} \left(1 - \frac{-c}{\mu a}\right)}.$$

Ora questi tre prodotti, al crescere di m e m', riescono insieme convergenti o no. Infatti, prendendo i logaritmi, ricordando la (6) del §. 62, e riflettendo che le serie

$$\Sigma \frac{1}{(\mu a + c)^2}, \quad \Sigma \frac{\eta}{(\mu a + c)^3}, \quad \Sigma \frac{1}{(\mu a)^2}, \quad \Sigma \frac{\eta'}{(\mu a)^3} \; (*)$$

sono convergenti anche riducendone i termini ai moduli rispet-

(*) Già s' intende che in queste due ultime serie non si contengono i termini corrispondenti a $\mu = 0$.

tivi, si vede che la convergenza dei suddetti prodotti dipende dalla convergenza delle due serie

$$\Sigma \frac{1}{\mu a + c}\ ,\ \Sigma \frac{1}{\mu a},$$

le quali appunto riescono insieme convergenti o no. E però sarà

$$\Pi\left(1 - \frac{z}{\mu a + c}\right) = \frac{\Pi\left(1 - \frac{z - c}{\mu a}\right)}{\Pi\left(1 - \frac{-c}{\mu a}\right)}.$$

Prendiamo dunque in considerazione il prodotto (3). Le quantità μa sono a due a due di valor contrario; quindi, se il prodotto si riguarda come limite del prodotto finito

$$(4)\qquad \prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1 - \frac{z}{\mu a}\right) = z \prod_{\mu=1}^{\mu=m}\left(1 - \frac{z^2}{\mu^2 a^2}\right),$$

esso riesce convergente, convergente in tale supposizione riuscendo la serie $\Sigma \frac{1}{\mu a}$. Questo caso è compreso nel teorema secondo del §. 63.

Ma abbiamo visto che la serie $\Sigma \frac{1}{\mu a}$, caso particolare ($z = 0$) della $\Sigma \frac{1}{z - \mu a}$, riesce ancora convergente considerandola come limite della somma

$$\sum_{\mu=-m'}^{\mu=m} \frac{1}{\mu a},$$

ogni qualvolta m' e m crescono all' infinito in rapporto finito tra loro; e che, designato con j questo rapporto, il valor della serie si ha aggiungendo $\frac{1}{a}\, lj$ al valore ch' essa prende nella supposizione di prima, cioè di $j = 1$. Riuscirà dunque pure convergente il prodotto (3) considerato come limite del prodotto

finito

$$\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a}\right);$$

ed il suo valore si avrà moltiplicando il valore ch' esso prende nella supposizione $j=1$ per

$$e^{-\frac{lj}{a}z}.$$

Esaminiamo ora come il prodotto si comporti cambiando z in $z+a$. Con questo cambiamento non si produce precisamente l' effetto di cambiare ogni fattore nel successivo, ma si dà origine a fattori diversi da quei di prima. Il fattore

$$1-\frac{z}{\mu a}=\frac{\mu a-z}{\mu a}$$

si cambia in

$$\frac{(\mu-1)a-z}{\mu a}.$$

Ritengasi, per brevità,

$$P_m(z)=\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a}\right),\qquad P(z)=\lim P_m(z).$$

Cambiando z in $z+a$, si ottiene

$$P_m(z+a)=P_m(z)\frac{-(m'+1)a-z}{ma-z}=P_m(z)\frac{-1-\frac{z+a}{m'a}}{1-\frac{z}{ma}}\cdot\frac{m'}{m};$$

quindi, al limite,

$$P(z+a)=-j\,P(z).$$

Non potendo j essere negativo, e però non $-j=1$, questa eguaglianza mostra che il prodotto (3), comunque facciansi crescere simultaneamente m e m', non ammette il periodo a. Però, esprimendo h un numero intero, si ha

$$P(z+ha)=(-j)^h\,P(z),$$

ed il prodotto ammetterà il periodo ha se sia $(-j)^h=1$. Per

questa eguaglianza h dev'essere pari e $j=1$. Dunque per avere in (3) un prodotto periodico, non secondo a ch'è impossibile, ma secondo un multiplo di a, bisogna riguardarlo come proveniente dalla espressione finita (4). Ed in tal caso si ha

$$P(z+a)=-P(z)\ ,\ P(z+2a)=P(z).$$

Il valore di questo prodotto si può dedurre da quello della serie

$$\sum\frac{1}{z-\mu a}=\frac{\pi}{a}\cot\frac{\pi z}{a}=\frac{d\,l\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{a}}{dz},$$

riflettendo che la derivazione della

$$l\,P=\sum l\left(1-\frac{z}{\mu a}\right)$$

somministra

$$\frac{d\,l\,P}{dz}=\sum\frac{1}{z-\mu a},$$

ed integrando questa eguaglianza, e determinando la costante d'integrazione colla

$$\lim_{z=0}\frac{P(z)}{z}=\lim_{z=0}\frac{\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{a}}{\frac{\pi z}{a}}=1.$$

Si ottiene

$$\lim\prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a}\right)=\frac{a}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{a},$$

ed in generale

$$\lim\prod_{\mu=-m'}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a}\right)=e^{-\frac{lj}{a}z}\,\frac{a}{\pi}\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi z}{a}\ .$$

§. 66. Passiamo ora a considerare il prodotto doppiamente infinito

(1) $$\prod\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}\right).$$

Per riconoscerne le condizioni di convergenza risaliremo alla (6) del §. 62, cioè alla

$$(2)\quad l\prod\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}\right)=-z\sum\frac{1}{\mu a+\nu b+c}-\frac{z^2}{2}\sum\frac{1}{(\mu a+\nu b+c)^2}$$
$$-z^3\sum\frac{\eta}{(\mu a+\nu b+c)^3},$$

la quale avverte che, essendo la terza delle serie del secondo membro convergente anche se riducansi i termini ai moduli rispettivi, il nostro prodotto riuscirà convergente ogni qualvolta riusciranno tali le serie

$$(3)\qquad \sum\frac{1}{\mu a+\nu b+c}\ ,\ \sum\frac{1}{(\mu a+\nu b+c)^2}.$$

Di queste serie conosciamo, in virtù dei §§. 58 e 59, alcuni casi di convergenza e le alterazioni di valore prodotte da alcune alterazioni nell' ordine dei termini. Ritenendole come provenienti dalle (5) del §. 58 cioè dalle

$$\sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{c+\mu a+\nu b},\qquad \sum_{\nu=-n}^{\nu=n}\sum_{\mu=-m}^{\mu=m}\frac{1}{(c+\mu a+\nu b)^2}$$

col far crescere infinitamente prima m e poi n, esse riescono convergenti; quindi riesce convergente il prodotto (1) definito come scaturiente dal prodotto finito

$$(4)\qquad \prod_{\nu=-n}^{\nu=n}\prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}\right)$$

col far crescere all' infinito prima m e poi n. Considerando per ora anche c come quantità variabile, indicheremo il prodotto (1) così definito con $\Phi(z,c)$.

Cambiando l' ordine di moltiplicazione dei fattori, questo prodotto varierà di un fattore esponenziale della forma

$$e^{-z(A-Bc)-\frac{z^2}{2}B},$$

dove A e B si intendono ancora definite dalle (8) del §. 59.

Imperocchè dalla (9) dello stesso § si ha

$$\nabla \sum \frac{1}{c+\mu a+\nu b} = -\nabla \sum \frac{1}{-c-\mu a-\nu b} = A - Bc .$$

È subito visto come si comporti il prodotto $\Phi(z, c)$ facendo crescere c di multipli di a e b. Infatti, imaginando operata nella (2) quella alterazione nell' ordine dei termini che equivale al cambiare c in $c + pa + qb$, il coefficiente di $-z$ prende, come abbiamo trovato, l' incremento $-2q\frac{\varepsilon\pi i}{a}$, mentre il coefficiente di $-\frac{z^2}{2}$, come quello di $-z^3$, non subisce variazione. E però il prodotto, di cui nella (2) si ha un logaritmo, prenderà il fattore $e^{\frac{2q\varepsilon\pi i}{a}z}$. Dunque avremo

(5) $$\Phi(z, c+pa+qb) = e^{\frac{2q\varepsilon\pi i}{a}z}\,\Phi(z, c) .$$

Questa eguaglianza mostra che, rispetto alla variabile c, il prodotto Φ è periodico secondo a, ma non secondo b.

Per opportuni valori particolari di z può aver luogo però anche la periodicità secondo un multiplo di b. Basta che sia

$$e^{\frac{2q\varepsilon\pi i}{a}z} = 1 ,$$

cioè, indicando con ι un intero qualsivoglia, basta che sia $\frac{2q\varepsilon\pi i}{a}z = 2\pi i\iota$, d' onde $z = \frac{\iota}{q}\varepsilon a$. Per questo valore di z il prodotto Φ possiederà, rispetto a c, i periodi a e qb. Se però si prendesse $q=1$, Φ si ridurrebbe a ± 1, come si farà evidente per la (9) e per la $\Psi(z+a) = -\Psi(z)$.

Ma passiamo ormai ad esaminare la periodicità nel prodotto Φ rispetto alla variabile z, che deve essere per noi la vera variabile, siccome quella riguardo a cui Φ è veramente un prodotto di fattori lineari interi. Questo esame, che potrebbe farsi direttamente, lo faremo mediante la già trovata proprietà (5).

Perciò riflettiamo che la espressione (1) contenente due elementi variabili z e c (ovvero quattro se vogliansi riguardare come tali anche a e b) può farsi dipendere, come già il prodotto (2) del paragrafo precedente, dalla espressione

$$(6) \qquad \Pi\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b}\right).$$

Infatti, primieramente, la identità

$$1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}=\frac{1-\dfrac{z-c}{\mu a+\nu b}}{1-\dfrac{-c}{\mu a+\nu b}}$$

e, per $\mu=0$ e $\nu=0$, quest' altra

$$1-\frac{z}{c}=\frac{z-c}{-c}$$

fanno vedere che per un numero finito di fattori sussiste identicamente la

$$(7) \qquad \Pi\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}\right)=\frac{\Pi\left(1-\dfrac{z-c}{\mu a+\nu b}\right)}{\Pi\left(1-\dfrac{-c}{\mu a+\nu b}\right)},$$

dove già si intende che in luogo di $1-\frac{z-c}{0}$ e $1-\frac{-c}{0}$ sianvi $z-c$ e $-c$. Ora questa relazione sussiste anche quando il numero dei fattori cresce all'infinito; imperocchè i prodotti (1) e (6) riescono sempre insieme convergenti o no. Ed invero l'(1) riesce convergente insieme colle serie (3), ed il (6) convergente insieme colle serie

$$\Sigma\frac{1}{\mu a+\nu b}\ ,\quad \Sigma\frac{1}{(\mu a+\nu b)^2},$$

le quali appunto convergono o no insieme colle (3), come si è visto per le eguaglianze (6) e (7) del §. 59.

Indicando con $\Psi(z)$ il valore del prodotto (6) definito

come limite a cui tende il prodotto finito

$$(8) \qquad \prod_{\nu=-n}^{\nu=n} \prod_{\mu=-m}^{\mu=m} \left(1 - \frac{z}{\mu a + \nu b}\right)$$

col far crescere infinitamente prima m e poi n, si avrà

$$(9) \qquad \Phi(z, c) = \frac{\Psi(z-c)}{\Psi(-c)}.$$

Il prodotto $\Psi(z)$ ha la proprietà

$$\Psi(-z) = -\Psi(z);$$

poichè, cambiando z in $-z$, i fattori di (8) non fanno che scambiarsi a due a due fra loro, tranne il fattore z che cambia di segno. Questa proprietà di Ψ traducesi per Φ nella seguente

$$\Phi(-z, -c) = \Phi(z, c).$$

Quanto alla periodicità, il prodotto Φ sarà periodico rispetto a z se sia tale il prodotto Ψ. Per riconoscere se questo sia periodico sostituiremo nella (5) la espressione (9) di Φ. Avremo

$$\frac{\Psi(z-c-pa-qb)}{\Psi(-c-pa-qb)} = e^{\frac{2q\pi i}{a} z} \frac{\Psi(z-c)}{\Psi(-c)},$$

ovvero, ponendo $c-z$ in luogo di z, ed essendo Ψ funzione dispari di z, avremo

$$\frac{\Psi(z+pa+qb)}{\Psi(c+pa+qb)} = e^{\frac{2q\pi i}{a}(c-z)} \frac{\Psi(z)}{\Psi(c)}$$

ossia

$$\Psi(z+pa+qb) = c_{p,q}\, e^{-\frac{2q\pi i}{a} z} \Psi(z),$$

$c_{p,q}$ essendo costante rispetto a z. Per determinare il valore di $c_{p,q}$ facciamo in questa eguaglianza

$$z+pa+qb = -z \quad \text{cioè} \quad z = -\frac{pa+qb}{2}.$$

I valori di Ψ nei due membri riusciranno tra loro contrari,

e, dividendo per l' uno di essi, si avrà

$$1=-c_{p,q}\,e^{q\varepsilon\pi i\frac{pa+qb}{a}}=-c_{p,q}(-1)^{pq}\,e^{q^2\varepsilon\pi i\frac{b}{a}}\,,$$

da cui

$$c_{p,q}=(-1)^{pq+1}\,e^{-q^2\varepsilon\pi i\frac{b}{a}}.$$

Quindi

$$\Psi(z+pa+qb)=(-1)^{pq+1}\,e^{-q^2\varepsilon\pi i\frac{b}{a}-2q\varepsilon\pi i\frac{z}{a}}\,\Psi(z)\,.$$

In questa determinazione di $c_{p,q}$ si è tacitamente supposto che p e q non fossero entrambi pari, altrimenti non si sarebbe potuto dividere per $\Psi\left(\frac{pa+qb}{2}\right)$ che avrebbe avuto il valor 0. Ma è subito visto come debbasi modificare la precedente relazione affinchè valga anche per p e q entrambi pari. Ponendovi $p=1$ e $q=0$ si ha $\Psi(z+a)=-\Psi(z)$. Ora, supposto p pari, qualunque sia q possiamo stabilire la precedente relazione per $\Psi(z+[p-1]a+qb)$, e cambiare poi in essa z in $z+a$ e sostituire $-\Psi(z)$ a $\Psi(z+a)$. Ciò facendo si trova che per p pari compare $(-1)^{(p-1)q}$ invece di $(-1)^{pq+1}$. Si può dunque abbracciare ogni caso scrivendo

$$(10)\qquad \Psi(z+pa+qb)=(-1)^{p+q}\,e^{-q^2\varepsilon\pi i\frac{b}{a}-2q\varepsilon\pi i\frac{z}{a}}\,\Psi(z)\,.$$

La (9) darà quindi per Φ

$$(11)\qquad \Phi(z+pa+qb,c)=(-1)^{p+q}\,e^{-q^2\varepsilon\pi i\frac{b}{a}-2q\varepsilon\pi i\frac{z-c}{a}}\,\Phi(z,c).$$

Ponendo $p=1$ e $q=0$, $p=0$ e $q=1$, si ha

$$(12)\qquad \Phi(z+a,c)=-\Phi(z,c)\,,$$

$$(13)\qquad \Phi(z+b,c)=-e^{-\varepsilon\pi i\frac{b}{a}-2\varepsilon\pi i\frac{z-c}{a}}\,\Phi(z,c)\,,$$

le quali mostrano che $2a$ è periodo di Φ, ma che non lo è alcun multiplo di b.

Però, sebbene il prodotto Φ non possegga esso la doppia periodicità, si riconosce, per la semplice comparsa del

fattore esponenziale nella seconda eguaglianza, che in esso si ha un elemento analitico col quale la doppia periodicità può tosto attuarsi. Basta prendere un quoziente di due prodotti Φ corrispondenti a due valori di c opportunamente diversi, moltiplicato, se vuolsi, per un fattore esponenziale.

Ma ogni ulteriore particolare circa questo punto si troverà superfluo se si riconosca che questi prodotti equivalgono alle serie ϑ semplici, colle quali già vedemmo in particolare costituite le funzioni doppiamente periodiche snz, cnz, dnz. Per riconoscere la detta equivalenza, senza dover trasformare i prodotti in serie o viceversa, basta ricordare (pag. 322) che la funzione $\vartheta(z, \alpha)$ resta determinata sino ad un fattore costante mediante le proprietà

(14) $$\vartheta(z) = \vartheta(z + \pi i) ,$$

(15) $$\vartheta(z) = e^{2z+\alpha} \vartheta(z+\alpha) ,$$

congiunte alle condizioni di essere monodroma, continua e finita per tutti i valori finiti di z. Ora, le eguaglianze (12) e (13), cambiandovi z in $\frac{a}{\pi i} z$ e ponendo

$$e^{-z} \Phi\left(\frac{a}{\pi i} z, c\right) = f(z) , \quad \frac{b\pi i}{a} = \alpha ,$$

danno

(16) $$f(z) = f(z + \pi i) ,$$

$$e^{\pi i\left(2\varepsilon \frac{c}{a} - 1 - \frac{b}{a}\right)} f(z) = e^{2\varepsilon z + \varepsilon\alpha} f(z + \alpha) .$$

Quest' ultima relazione si riduce precisamente alla

(17) $$f(z) = e^{2z+\alpha} f(z+\alpha)$$

ponendo

$$\varepsilon = 1 \quad \text{e} \quad 2\frac{c}{a} - 1 - \frac{b}{a} = \text{numero intero pari.}$$

Per questo intero pari può prendersi senz' altro lo zero; poichè dalla (5) si vede che cambiando il valor di c di un mul-

tiplo di a non si porta alcun cambiamento nella Φ e quindi nella $f(z)$. E pertanto la espressione

$$e^{-z}\,\Phi\left(\frac{a}{\pi i}z,\ \frac{a+b}{2}\right)$$

cioè dire il prodotto

$$e^{-z}\lim_{n=\infty}\lim_{m=\infty}\prod_{\nu=-n}^{\nu=n}\prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1-\frac{\frac{a}{\pi i}z}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)a+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)b}\right)$$

essendo funzione monodroma continua e finita per tutti i valori finiti di z e soddisfacendo alle relazioni (16) e (17), identiche alle (14) e (15), deve coincidere colla funzione $\vartheta(z)$, almeno sino ad un fattore costante. E siccome il prodotto riducesi a 1 per $z=0$, così si ha

$$(18)\quad e^{-z}\lim_{n=\infty}\lim_{m=\infty}\prod_{\nu=-n}^{\nu=n}\prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\pi i+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\alpha}\right)=\frac{\vartheta(z,\alpha)}{\vartheta(0,\alpha)}.$$

La condizione $\varepsilon=1$ esprime che dev' essere positivo il coefficiente di i in $\frac{b}{a}$, cioè negativa la parte reale di α; il che costituisce, come si sa, la condizione di convergenza della serie $\vartheta(z,\alpha)$ (*).

(*) Se in luogo di prendere come prodotto finito, d' onde l' infinito debba scaturire, quello indicato da

$$\prod_{\nu=-n}^{\nu=n}\prod_{\mu=-m}^{\mu=m},$$

si prendesse, come nella formola (9) della pag. 144 della *Theorie* ecc. dei sigg. Briot e Bouquet, quello indicato da

$$\prod_{\nu=-n-1}^{\nu=n}\prod_{\mu=-m-1}^{\mu=m},$$

allora non entrerebbe nella espressione della ϑ il fattore e^{-z}; poichè il limite di questo secondo prodotto è eguale al limite del primo (già s' intende andando all' infinito prima m

CAPITOLO QUARTO

Integrali.



§. 67. La idea di integrale e le proprietà da esporsi in questo capitolo devono somministrare i mezzi coi quali intraprendere nella seguente *Sezione* lo studio delle funzioni in generale. E però facciamo anticipatamente riflettere che la detta idea e le dette proprietà verranno stabilite indipendentemente da ogni supposizione di espressioni analitiche.

Allorchè si riguardi la variabile d'integrazione come affatto libera, cioè come suscettibile di qualsiasi valore complesso, la idea di integrale comporta una estensione avvertita per il primo in tutta la debita larghezza da Cauchy (*Notizie*, pag. 72). Eccola.

Per stabilire il significato della notazione

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \quad ,$$

dove $f(x)$ denota una quantità dipendente dalla variabile reale x

e poi n si nell' uno che nell' altro) moltiplicato per e^{-z}. Ciò è sobito verificato prendendo i logoritmi dei due prodotti come nella formola (2), o calcolando nella maniera già vista a pagg. 299-302 le variazioni ∇ delle serie (3) nel passaggio dal primo al secondo prodotto. Per la prima delle serie (3) la variazione risulta $=1$, per la seconda $=0$.

Se nel prodotto finito

$$\prod_{\nu=-n}^{\nu=n}\ \prod_{\mu=-m}^{\mu=m}\left(1-\frac{z}{\mu a+\nu b+c}\right)$$

si facesse crescere infinitamente prima n e poi m, il risultato che si avrebbe, contenuto necessariamente nella formola

$$e^{-z(A-Bc)z-\frac{z^2}{2}B}\ \Phi_{(z,c)}\ ,$$

sarebbe quello corrispondente ai valori $A=0$, $B=-\frac{2\pi i}{ab}$.

nell' intervallo $x_0 \ldots \mathbf{x}$ e quivi dotata (lo si supponga per semplicità) di un solo valore per ogni valore di x, basta considerarla come esprimente il limite verso cui tende la somma

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots . + f(x_{n-1})(\mathbf{x} - x_{n-1})$$

allorchè le quantità

$$x_0, x_1, x_2, \ldots \ldots, x_{n-1}, \mathbf{x},$$

crescendo indefinitamente di numero, tendano a costituire una successione continua da x_0 a $\mathbf{x}$.

Per stabilire il significato della notazione

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{\mathbf{z}} f(z)\,dz\ ,$$

dove $f(z)$ denoti una quantità dipendente in qualsiasi maniera (*) dalla variabile complessa z, è dunque naturale di considerarla come esprimente il limite verso cui tende la somma

$$(2) \quad f(z_0)(z_1 - z_0) + f(z_1)(z_2 - z_1) + \ldots . + f(z_{n-1})(\mathbf{z} - z_{n-1})$$

allorchè le quantità

$$(3) \qquad z_0, z_1, z_2, \ldots \ldots, z_{n-1}, \mathbf{z}$$

crescendo indefinitamente di numero tendano a costituire una successione continua, ma del resto complessa qualsiasi, da z_0 a $\mathbf{z}$.

Rappresentando i valori della variabile z, come al solito, mediante i punti del piano z, allorchè le quantità (3) costituiranno una successione continua, i loro punti rappresentativi costituiranno una linea continua avente principio in z_0 e termine in $\mathbf{z}$. Questa linea verrà detta *linea* o *cammino d' integrazione*; e la integrazione stessa potrà qualificarsi, occorrendo, siccome *complessa.*

Si sa che il limite della somma

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots . + f(x_{n-1})(\mathbf{x} - x_{n-1})$$

(*) Data o non data mediante un' espressione analitica, e funzione o no della variabile complessa; e che per semplicità s' imagina ammettere nel corso della integrazione un solo valore per ogni valore di essa variabile.

non dipende dal modo con cui si fa crescere il numero e diminuire gli intervalli dei punti

$$x_0 , x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_{n-1} , \mathrm{X} \ ;$$

ed è chiaro che senza di questa proprietà la definizione superiormente esposta non basterebbe a stabilire un significato preciso per l' integrale

$$\int_{x_0}^{\mathrm{X}} f(x)\,dx \ .$$

Or bene, è facile riconoscere che, fissata la linea d' integrazione, questa proprietà sussiste ancora pel limite della somma (2); cioè, che questo limite non dipende dal modo con cui i punti (3) andranno nella detta linea crescendo di numero ed accostandosi l' uno al successivo. Si rientra infatti nel caso stesso di prima introducendo come variabile d' integrazione una variabile reale. Prendendo, per esempio, come variabile indipendente la lunghezza l della porzione del cammino d' integrazione avente principio in z_0 e termine nel punto qualunque z, le parti reale e imaginaria di z e di $f(z)$ potranno tutte quattro considerarsi come determinate funzioni della variabile l, e, indicandole con $x(l)$, $y(l)i$, $\varphi(l)$, $\psi(l)i$, l' integrale (1) potrà scriversi come segue

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \int_0^l \left[\varphi(l) + \psi(l)i\right]\left[\frac{dx(l)}{dl} + \frac{dy(l)}{dl}i\right] dl$$

od anche come segue

$$\int_0^l \left[\varphi\frac{dx}{dl} - \psi\frac{dy}{dl}\right] dl + i\int_0^l \left[\varphi\frac{dy}{dl} + \psi\frac{dx}{dl}\right] dl \ ;$$

e sotto l' uno come sotto l' altro aspetto è evidente che il valore di (1) non dipenderà dal modo con cui le quantità

$$0 , l_1 , l_2 , \ldots\ldots , l_{n-1} , l_n$$

giungeranno a costituire una successione continua, ossia i punti (3) a coprire totalmente la prescritta linea d'integrazione.

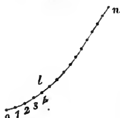
Però, mentre nel caso di variabile reale il cammino d'integrazione non può essere che una porzione dell'asse reale, nel caso di variabile affatto libera può prendere infinite forme, essere cioè composto di parti rettilinee e curvilinee di qualsiasi natura, di giri e rigiri quali e quanti si vogliano.

Se $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono due quantità dipendenti dalle variabili x e y, la definizione stabilita per il simbolo (1) si estende affatto naturalmente al simbolo

$$\int P\,d\,Q\,,$$

che per $Q=x+yi$ riducesi all'(1). Sia l una linea nel solito piano rappresentativo (Fig. 20), ed esprimasi con

Fig. 20.



$$0\,,\,1\,,\,2\,,\,3\,,\,\ldots\ldots,\,n\,,$$
$$P_0\,,P_1\,,P_2\,,P_3\,,\,\ldots\ldots,\,P_n\,,$$
$$Q_0\,,Q_1\,,Q_2\,,Q_3\,,\,\ldots\ldots,\,Q_n\,,$$

una serie di punti in essa linea ed i valori delle quantità P e Q in questi punti; per integrale di $P\,d\,Q$ preso lungo la linea l devesi intendere il limite a cui converge la somma

$$P_0(Q_1-Q_0)+P_1(Q_2-Q_1)+\ldots\ldots+P_{n-1}(Q_n-Q_{n-1})$$

allorchè i punti

$$0\,,1\,,2\,,3\,,\,\ldots\ldots,\,n$$

crescendo indefinitamente di numero ed avvicinandosi ciascuno al successivo tendano a costituire la linea continua l.

Volendo indicare qual variabile indipendente, come dianzi, la lunghezza variabile l della linea d'integrazione, si potrebbe scrivere

$$\int P\,d\,Q=\int P\frac{dQ}{dl}\,dl$$

$$=P_0\frac{Q_1-Q_0}{l_1}l_1+P_1\frac{Q_2-Q_1}{l_2-l_1}(l_2-l_1)+\ldots\ldots+P_{n-1}\frac{Q_n-Q_{n-1}}{l_n-l_{n-1}}(l_n-l_{n-1}),$$

della qual somma già s'intende il limite.

§. 68. È ovvio comprendere che nella integrazione complessa debbano ancora sussistere quelle proprietà fondamentali della integrazione reale, che scaturiscono dalla definizione di integrale come di limite di una somma. Consideriamone, in particolare, qualcuna.

Anzi tutto si noti, che, ove si dica essere fissata una linea l di integrazione, s'intende che sia anche fissato secondo quale delle due direzioni la linea deve essere percorsa. La stessa linea ma da percorrersi in direzione contraria sarà designata colla stessa lettera ma preceduta dal segno $-$.

Ciò premesso, una prima proprietà da verificarsi come ancora sussistente è la

$$(1) \qquad \int_l P\,d\,Q = -\int_{-l} P\,d\,Q\,.$$

Infatti per definizione si ha

$$\int_{-l} PdQ = P_n(Q_{n-1}-Q_n)+\ldots\ldots+P_2(Q_1-Q_2)+P_1(Q_0-Q_1),$$

e, imaginando, come nella integrazione reale, sostituito ad ogni infinitamente piccolo quale $P_\nu\,(Q_{\nu-1}-Q_\nu)$ un' infinitamente piccolo quale $P_{\nu-1}\,(Q_{\nu-1}-Q_\nu)$, si ottiene la espressione stessa dell'integrale preso lungo l, in cui però i termini trovansi con ordine e segno contrari.

Se il cammino l d' integrazione si concepisca diviso in più parti $l', l'', l''', \ldots$; si riconosce immediatamente essere

$$(2) \qquad \int_l PdQ = \int_{l'} PdQ + \int_{l''} PdQ + \int_{l'''} PdQ + \ldots$$

Ristringiamoci adesso al caso di $Q=x+yi=z$ e di P *funzione* di $x+yi$, la quale esprimeremo con w.

La derivata dell' integrale

$$(3) \qquad \int_{z_0}^{z} w\,(z)\,d\,z$$

rispetto al limite superiore ritenuto variabile è, come nella integrazione reale, $w(z)$. Infatti, imaginando che il cammino d'integrazione si prolunghi da $\mathbf{z}$ in $\mathbf{z}'$, insieme colla

$$(4)\quad \int_{z_0}^{\mathbf{z}} w dz = w(z_0)(z_1-z_0)+\ldots+w(z_{n-1})(\mathbf{z}-z_{n-1})$$

potremo scrivere la

$$\int_{z_0}^{\mathbf{z}'} w dz = w(z_0)(z_1-z_0)+\ldots+w(z_{n-1})(\mathbf{z}-z_{n-1})+w(\mathbf{z})(\mathbf{z}'-\mathbf{z}),$$

dalla quale, sottrattane la prima, si ha

$$\frac{\int_{z_0}^{\mathbf{z}'} w dz - \int_{z_0}^{\mathbf{z}} w dz}{\mathbf{z}'-\mathbf{z}} = w(\mathbf{z}).$$

L' integrale (3), avendo una derivata indipendente dal valore del differenziale $\mathbf{z}'-\mathbf{z}=d\mathbf{z}$, è dunque funzione di $\mathbf{z}$. E, viceversa, potremo anche asserire che $\mathbf{z}$ è funzione dell'integrale.

Altrettanto ha luogo riguardando come variabile il limite inferiore; nel qual caso però la derivata è $-w(z_0)$.

Il modulo dell' integrale (3), ove w sia continua e finita dappertutto nel cammino l d'integrazione, può sempre dichiararsi minore od al più eguale al prodotto della lunghezza totale della linea l per uno fra i moduli assunti da w lungo l. Infatti, il modulo della somma secondo membro della (4) è minore od al più eguale alla somma

$$\text{mod}\, w(z_0)\,.\,\text{mod}\,(z_1-z_0)+\ldots+\text{mod}\, w(z_{n-1}).\,\text{mod}\,(\mathbf{z}-z_{n-1}),$$

e questa somma è minore od al più eguale al prodotto di

$$(5)\qquad \text{mod}\,(z_1-z_0)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\text{mod}\,(\mathbf{z}-z_{n-1})$$

per una quantità compresa fra il più grande e il più piccolo dei moduli

$$\text{mod}\, w\,(z_0),\ \ldots\ldots\ldots\ldots,\ \text{mod}\, w\,(z_{n-1})\,.$$

Ma, per $n=\infty$, questa serie di moduli costituisce una successione continua; dunque una quantità compresa fra il modulo più

grande ed il più piccolo coincide certamente con qualcuno dei moduli intermedi; inoltre la somma delle corde infinitesime (5) esprime precisamente la lunghezza totale della linea d'integrazione.

Se w avrà un valore infinitamente piccolo lungo tutto il cammino d'integrazione, sarà infinitamente piccolo anche il valore dell' integrale (3).

Supponiamo che w dipenda anche da una seconda variabile o parametro t, rispetto a cui abbia una derivata finita per ogni punto di l. Indichiamo questa derivata con $w_1(z,t)$. Ciò premesso, è subito dimostrato, come nella integrazione reale, che la derivazione dell' integrale (3) rispetto a t può attuarsi sotto il segno $\int$. Infatti, esprimendo t' un valore del parametro infinitamente poco diverso da t, si può porre

$$\frac{w(z,t') - w(z,t)}{t'-t} = w_1(z,t) + \eta ,$$

essendo η infinitamente piccolo insieme con $t'-t$. E quindi il rapporto dell' incremento dell' integrale all'incremento $t'-t$,

$$\frac{\int_{z_0}^{z} w(z,t') - \int_{z_0}^{z} w(z,t)\, dz}{t'-t} \quad \text{ossia} \quad \int_{z_0}^{z} \frac{w(z,t') - w(z,t)}{t'-t} dz ,$$

si potrà scrivere come segue

$$\int_{z_0}^{z} w_1(z,t)\, dz + \int_{z_0}^{z} \eta\, dz .$$

Di questi due integrali il secondo tende a zero con η, cioè con $t'-t$: dunque ecc.

§. 69. Ma tralasciamo ormai ogni ulteriore considerazione circa la sussistenza delle più comuni proprietà degli integrali, per passare a quella questione cardinale nella integrazione complessa che concerne la influenza del cammino sul valore dell' integrale.

Supponiamo che sia data in una porzione S del piano z una funzione monodroma w, cioè dire che per w si trovi de-

posto in ogni punto di S un valore, il quale vari da punto a punto in guisa da soddisfare la $i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$. E consideriamo la integrazione da effettuarsi sul differenziale $w\,dz$ a partire da un punto fisso z_0 sino ad altro punto fisso $\mathbf{z}$. Poichè non si presuppone nulla circa la funzione fuori di S, è quasi superfluo l'avvertire che questi punti fissi e tutti i cammini d' integrazione da imaginarsi dall' uno all' altro s' intendono contenuti entro S

Volendo ammettere che esista una funzione monodroma e finita F di z in S avente per derivata la w, è subito dimostrato che, se w sia continua e finita dappertutto in S, l'integrale

$$\int_{z_0}^{\mathbf{z}} w\,dz$$

riesce sempre dell' egual valore qualunque sia il cammino d'integrazione. Infatti, indicando con $0, 1, 2, \ldots, n$ una serie di punti avente principio in z_0 e termine in $\mathbf{z}$ (laonde $0, n$ significano qui lo stesso che $z_0, \mathbf{z}$), si ha identicamente

$$F_1-F_0 \quad +F_2-F_1 \ldots\ldots\ldots +F_n-F_{n-1}$$
$$=F_n-F_0=F(\mathbf{z})-F(z_0)\ ,$$

da cui

$$\frac{F_1-F_0}{z_1-z_0}(z_1-z_0)+\frac{F_2-F_1}{z_2-z_1}(z_2-z_1)+\ldots+\frac{F_n-F_{n-1}}{z_n-z_{n-1}}(z_n-z_{n-1})$$
$$=F(\mathbf{z})-F(z_0)\ ,$$

eguaglianza che sussiste comunque cresca n. Imaginando che n cresca infinitamente, sì che i punti $0, 1, 2, \ldots, n$ tendano a costituire una linea continua da z_0 a $\mathbf{z}$, e sostituendo ad ogni infinitamente piccolo come

$$\frac{F_{\nu+1}-F_\nu}{z_{\nu+1}-z_\nu}(z_{\nu+1}-z_\nu)$$

l' infinitamente piccolo come

$$w(z_\nu)(z_{\nu+1}-z_\nu)\ ,$$

che manifestamente sta al primo in rapporto tendente all'unità, si avrà

$$\lim \sum w(z_\nu)(z_{\nu+1}-z_\nu) = \int w\,dz = F(\mathbf{z}) - F(z_0).$$

Qualunque sia, dunque, il cammino d'integrazione che vogliasi supporre scaturito dalla serie di punti $0, 1, 2, \ldots, n$, il valore dell'integrale è costantemente $F(\mathbf{z}) - F(z_0)$.

Così, per esempio, nel caso di $w = (z-\gamma)^m$ dove m sia numero intero e positivo, sapendosi che $(z-\gamma)^m$ è la derivata della funzione $\frac{(z-\gamma)^{m+1}}{m+1}$ monodroma e finita per qualunque valor finito di z, si conchiuderebbe subito essere

$$\int_{z_0}^{\mathbf{z}} (z-\gamma)^m = \frac{(\mathbf{z}-\gamma)^{m+1}}{m+1} - \frac{(z_0-\gamma)^{m+1}}{m+1},$$

e quindi aversi un solo valore per qualunque cammino tracciabile nel finito.

Ma importa di ricercare la influenza del cammino senza presupporre l'esistenza della funzione F. Questa investigazione si trova già fatta da Cauchy nella Memoria stessa colla quale divulgava la idea della integrazione con variabile complessa (*Notizie*, pagg. 72-74). Seguendo lui, stabiliremo il seguente

Teorema. *L'integrale*

$$\int_{z_0}^{\mathbf{z}} w\,dz,$$

preso lungo una linea qualsivoglia, non cambia di valore, se, rimanendo fissi i punti estremi z_0 *e* $\mathbf{z}$, *la linea si deforma senza sorpassare alcun punto dove la funzione* w *o la sua derivata cessino di essere monodrome, continue e finite.*

Sia l la linea lungo la quale s'intende preso in prima l'integrale, ed imaginiamo ch'essa linea, o filo, subisca una deformazione infinitamente piccola, per modo che, rimanendone fissi gli estremi z_0 e $\mathbf{z}$, ogni altro punto z di essa (Fig. 21)

Fig. 21.



possa essersi spostato di una quantità infinitamente piccola ∂z. Indicando con l' la linea dopo la deformazione, potremo esprimere i valori dell' integrale prima e dopo la deformazione con

$$\int_l w\,dz \quad , \quad \int_{l'} w\,dz .$$

Se i cammini l e l' non contengono nè passano infinitamente vicini a discontinuità o infiniti di w, la differenza tra i valori di w nei punti z e $z+\partial z$ sarà infinitamente piccola. Indicandola con ∂w, potremo porre la variazione dell' integrale sotto la forma

$$\partial\int_l w\,dz = \int_{l'} w\,dz - \int_l w\,dz = \int_l (w+\partial w)d(z+\partial z) - \int_l w\,dz ,$$

ovvero, trascurando l' infinitamente piccolo di secondo ordine

$$\int_l \partial w . d\partial z ,$$

sotto la forma

$$\int_l (\partial w . dz + w . d\partial z) .$$

Ma, se w è funzione di z e la sua derivata è continua e finita, oltrechè monodroma, nella lista determinata da l e l', si può anche cambiare questa forma nella seguente

$$\int_l (dw . \partial z + w . d\partial z) = \int_l d\,(w\partial z) ,$$

in virtù delle

$$\partial w . dz = \frac{\partial w}{\partial z} \partial z . dz = \frac{dw}{dz} \partial z . dz = dw . \partial z .$$

Ora è

$$\int_l d\,(w\partial z) = \int_{z_0}^{\mathbf{z}} d\,(w\partial z) = w(\mathbf{z})\partial \mathbf{z} - w\,(z_0)\,\partial z_0 ;$$

e, siccome i punti z_0 e $\mathbf{z}$ rimasero fissi, si ha $\delta z_0 = 0$ e $\delta \mathbf{z} = 0$; dunque, astrazion fatta dal termine di secondo ordine, si ha

$$\delta \int_l w\, dz = 0 .$$

Se ora s' imagina che ciascun punto z di l subisca non un solo ma successivamente tanti spostamenti infinitamente piccoli del prim' ordine (ossia ogni quantità z tante variazioni δz del prim'ordine), sì che la loro somma riesca uno spostamento finito, e se in coteste successive deformazioni di l non verranno mai sorpassati punti dove w e la sua derivata cessino di essere monodrome, continue e finite, la variazione totale dell' integrale di $w\,dz$ sarà parimenti nulla. Avuto riguardo al termine dianzi trascurato, essa potrebbe dichiararsi infinitamente piccola del prim' ordine; ma ciò è come dire ancora nulla. *C. D. D.*

Indicando con m una linea sensibilmente diversa da l, ma da potersi considerare come una deformata della l, cioè una di quelle ottenibili col deformare l senza sorpassare alcuno di detti punti singulari, si avrà

$$\int_l w\, dz = \int_m w\, dz ,$$

ed, essendo

$$\int_m w\, dz = - \int_{-m} w\, dz ,$$

si avrà anche

$$\int_l w\, dz + \int_{-m} w\, dz = 0 .$$

Ora le linee l e $-m$ prese insieme costituiscono una linea chiusa $l-m$ che può considerarsi come il contorno di una porzione A di S, entro cui non esistono punti dove w e la sua derivata cessino di essere monodrome, continue e finite;

e la somma dei due integrali presi lungo l e $-m$ può considerarsi come unico integrale

$$\int_{l-m} w\, d\, z$$

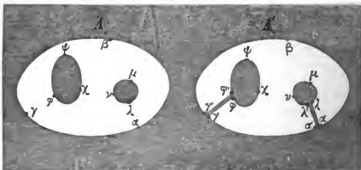
preso, cioè, lungo l'intero contorno di A. Il dimostrato teorema fondamentale può dunque enunciarsi anche nei seguenti termini.

Teorema. *L'integrale di $w\, d\, z$ preso lungo l'intero contorno di una parte A del piano z, entro cui w e la sua derivata sieno funzioni monodrome, continue e finite di z, è nullo* (*).

La data dimostrazione supporrebbe il contorno della superficie A costituito da una sola linea continua. Ma è facile riconoscere che il teorema sussiste anche quando il contorno consti di due o più parti separate.

Ed invero, sia, per esempio, il contorno a di A composto (Fig. 22) di tre parti separate $\alpha\beta\gamma\alpha, \lambda\nu\mu\lambda, \varphi\psi\chi\varphi$; laonde

Fig. 22.



potremo scrivere $a = \alpha\beta\gamma\alpha + \lambda\nu\mu\lambda + \varphi\psi\chi\varphi$. Si imaginino operati nella superficie A due tagli, di guisa che ne risulti una

(*) È ovvio che, se, invece di supporre fissata da prima una linea l e da essa per deformazione scaturita un' altra linea m e quindi il contorno $l-m$ di A, si supponesse fissata da prima la superficie A, si ritornerebbe nella supposizione stessa precedente riguardando una parte qualsiasi del contorno come linea l e la restante come m.

superficie A' il cui contorno sia una sola linea continua, formata con le varie parti del contorno di A e con i due orli di ciascun taglio (*). Cominciando dal punto γ, nell' uno dei due sensi, il contorno riesce formato (giusta la figura) colla seguente successione di parti

$$\gamma\alpha'+\alpha'\lambda'+\lambda'\nu\mu\lambda+\lambda\alpha+\alpha\beta\gamma'+\gamma'\varphi'+\varphi'\psi\chi\varphi+\varphi\gamma .$$

Ora, per la dimostrazione precedente, l' integrale di wdz preso lungo questo intero contorno è nullo. Questo integrale può decomporsi nella somma degli integrali presi lungo le singole parti. Sarà dunque

$$\int_{\gamma\alpha'} wdz+\int_{\alpha'\lambda'} wdz+\int_{\lambda'\nu\mu\lambda} wdz+\int_{\lambda\alpha} wdz+\int_{\alpha\beta\gamma'} wdz+\int_{\gamma'\varphi'} wdz+\int_{\varphi'\psi\chi\varphi} wdz+\int_{\varphi\gamma} wdz=0 .$$

Ma, $\alpha\lambda$ e $\alpha'\lambda'$ combaciandosi in tutta la loro estensione, (o, realmente, non essendo che una medesima linea), e così pure $\gamma\varphi$ e $\gamma'\varphi'$; si ha ((1) del §. 68)

$$\int_{\alpha'\lambda'} wdz=\int_{\alpha\lambda} wdz=-\int_{\lambda\alpha} wdz , \int_{\gamma'\varphi'} wdz=\int_{\gamma\varphi} wdz=-\int_{\varphi\gamma} wdz ;$$

e per la (2) del §. 68 si ha ancora

$$\int_{\gamma\alpha'} wdz+\int_{\alpha\beta\gamma'} wdz=\int_{\alpha\beta\gamma\alpha} wdz .$$

Dunque la precedente eguaglianza diverrà

$$\int_{\alpha\beta\gamma\alpha} wdz+\int_{\lambda'\nu\mu\lambda} wdz+\int_{\varphi'\psi\chi\varphi} wdz=0 ,$$

il cui primo membro, compendiato in un solo integrale, riesce appunto l' integrale preso lungo l' intero contorno a di A.

Il teorema sussisterebbe del pari supponendo A composto non di un pezzo tutto connesso di piano z, ma di parecchi pezzi separati A_1, A_2, A_3, ecc. Imperocchè, indicandone i contorni con a_1, a_2, a_3, ecc., si avrebbero separatamente

$$\int_{a_1} wdz=0 , \int_{a_2} wdz=0 , \int_{a_3} wdz=0 , \text{ ecc.} ,$$

d' onde

$$\int_{a_1+a_2+a_3+\text{ecc.}} wdz=0 .$$

(*) Nella figura i due orli di ciascun taglio sono, per maggior chiarezza, rappresentati come se fossersi discostati un poco l' uno dall' altro. Ma, in realtà, α' devesi tenere per identico con α, γ' con γ, ecc.

Considerando l'integrale di wdz preso lungo una linea chiusa a, che possa anche non essere contorno di un pezzo di piano entro cui w sia dappertutto monodroma, continua e finita, il valor suo potrà anche non essere zero. Comunque sia, giova riflettere che ha luogo anche in questo caso, come già per una linea avente principio e termine in due punti fissi z_0 e $\mathbf{z}$, la inalterabilità del valor dell' integrale al deformarsi della linea, senza che vengano sorpassate singularità della w o della derivata. Infatti, sia b una delle forme che così può prendere la a (per fissar le idee si può imaginare che a sia una circonferenza e b un'altra circonferenza concentrica con a); tirando da un punto α di a una linea $\alpha\beta$ ad un punto β di b si potrà comporre la linea

$$\alpha\beta+b+\beta\alpha$$

da considerarsi pur' essa come una trasformata della a ottenibile senza sorpassare alcuna singularità. Tanto la a che questa sua trasformata possono considerarsi come linee aventi principio e termine nel punto α rimasto fisso; e con ciò si rientra dunque nelle circostanze del teorema fondamentale ($z_0=\alpha$, $\mathbf{z}=\alpha$), e si ha

$$\int_a wdz = \int_{\alpha\beta+b+\beta\alpha} wdz = \int_{\alpha\beta} wdz + \int_b wdz + \int_{\beta\alpha} wdz = \int_b wdz\,.$$

Adesso però, innanzi proseguire viepiù nelle conseguenze del teorema fondamentale, vogliamo esporre una seconda dimostrazione del medesimo, che riscontrasi nella dissertazione inaugurale del sig. Riemann, come nelle posteriori pubblicazioni della di lui scuola; mentre la prima è conservata nelle pubblicazioni dei sigg. Puiseux, Briot e Bouquet. Questa ha il pregio della maggiore spontaneità; ma ha, per converso, il difetto di dover presupporre che sia monodroma, continua e finita anche la derivata, mentre ciò resta già inchiuso, come vedremo, nella supposizione dell' essere monodroma, continua e finita la funzione (*).

(*) Però nella seconda dimostrazione (§. 71) si potrà notare che viene tacitamente ammesso potersi invertere l' ordine delle integrazioni in uno dei due integrali doppi

$$\iint \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,dx\,dy \quad , \quad \iint \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy\,dx \;;$$

§. 70. Ma prima ancora vogliansi notare le convenzioni che, seguendo il sig. Riemann, presentiamo in questo paragrafo, siccome da adottarsi invariabilmente d' ora in poi riguardo ai contorni delle figure ed anche a linee quali si siano.

Sia S una determinata porzione del solito piano orizzontale, e sul medesimo s' imagini una persona che voglia percorrere l' intero contorno s di S. La persona può scegliere fra due direzioni contrarie. Muovendosi secondo l' una direzione, essa avrebbe la superficie S sempre a sinistra; muovendosi secondo l' altra, avrebbe la superficie S sempre a destra. Ciò premesso,

mentre, non le funzioni da integrarsi, cioè le derivate

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\ , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y}\ ,$$

sì bene le funzioni Ψ e Φ sono presupposte continue e finite per tutto il campo della integrazione. Se la inversione non fosse lecita, la differenza dei due precedenti integrali non potrebbe compendiarsi nell' unico integrale

$$\iint\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dx\,dy\ , \quad \text{ovvero nel} \quad \iint\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dy\,dx\ ,$$

che s' intende formato coll' effettuare la doppia integrazione sul differenziale indiviso

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}-\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dx\,dy\ ,$$

sì che, quando questo sia sempre zero, si possa conchiudere essere zero anche l' integrale. Ma ci sembra potersi togliere ragione a questa nota, imaginando in prima circondate con linee le singolarità delle due derivate, e ritenendo la doppia integrazione estesa alla superficie che rimane staccando da A i pezzi racchiusi in queste linee; per il che viene ad essere notoriamente lecita la invertibilità dell'ordine d' integrazione negli integrali doppi, mentre poi gli integrali semplici da prendersi luogo le dette linee si potranno rendere minori di qualsia grandezza assegnata stringendo viepiù le linee intorno alle singolarità.

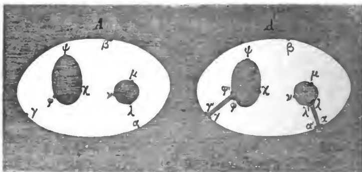
Ad ogni moda notiamo eziandio, che, se si tratta puramente di funzioni algebriche, come nelle *Recherches etc.* già citate del sig. Puiseux, la presupposizione che anche la derivata sia continua e finita non cagiona imbarazzo, in quanto che la sussistenza delle condizioni riferentisi alla derivata vien tosto riconosciuta mercè l' espressione della medesima formata razionalmente con la funzione e la variabile; e che, per la teorica generale delle funzioni di una variabile complesso, la necessità di questa presupposizione cessa allorchè, poco oltre, si trova che, se una funzione di z è monodroma, continua e finita in una porzione A del piano z, quivi dev' esserlo anche la derivata. Ciò può subito riscontrarsi nell' opera dei sigg. Briot e Bouquet (n. 23).

chiameremo *direzione positiva del contorno* la prima delle due, cioè quella secondo cui la persona muovendosi ha la superficie sempre alla sinistra.

E, in relazione con questa definizione e con quella di senso positivo degli angoli (§. 8), diremo altresì che un punto mobile z fa un giro *positivo* intorno ad un determinato punto ϖ quando descriva intorno a ϖ una linea rientrante semplice, come sarebbe una circonferenza, in quella direzione che è la positiva della linea considerata come contorno della porzione finita di piano in essa racchiusa, o, ciò ch' è lo stesso, in quella direzione secondo la quale il raggio $\overline{\varpi z}$ rota nel senso positivo degli angoli.

Quando il contorno di una superficie consti di più parti separate, devesi tener ferma la esposta definizione di *direzione positiva del contorno* per ciascuna parte separatamente; mercè di che non resterà mai per veruna parte incerto quale delle due direzioni sia da riguardarsi come positiva. Nel caso, per esempio, della superficie A della fig. 22, la direzione positiva

Fig. 22.



per la curva maggiore è $\alpha\beta\gamma\alpha$, e per le altre due curve è rispettivamente $\lambda\nu\mu\lambda$, $\varphi\psi\chi\varphi$. La somma

$$\int_{\alpha\beta\gamma\alpha} wdz + \int_{\lambda\nu\mu\lambda} wdz + \int_{\varphi\psi\chi\varphi} wdz = \int_{\alpha\beta\gamma\alpha+\lambda\nu\mu\lambda+\varphi\psi\chi\varphi} wdz$$

del § precedente esprime l' integrale di wdz preso lungo l' intero contorno di A in direzione positiva.

Ogni qualvolta il contorno d' una superficie verrà designato con una semplice lettera, si intenderà il contorno preso in direzione positiva. Il contorno in direzione negativa verrebbe, occorrendo, designato colla stessa lettera preceduta dal segno —, conformemente al fissato per una linea qualunque l nel §. 68.

La normale al contorno di una superficie in un punto qualsiasi di esso può imaginarsi diretta verso l' interno della superficie o verso l' esterno. Diremo *normale interna* la prima, *normale esterna* la seconda.

In generale, poi, per qualunque linea ς tracciata sul piano orizzontale (*), della quale sia fissata la direzione positiva, e propriamente per qualunque suo elemento $d\varsigma$ (diretto positivamente) giova poter distinguere due direzioni laterali, ossia chiamare *direzione laterale positiva*, relativamente a $d\varsigma$, quella che giace rispetto a $d\varsigma$ come $+i$ a 1 (**), e *direzione laterale negativa* la contraria. Conformemente a ciò si potranno anche usare le espressioni di *lato positivo* e *lato negativo* di ς. Il lato positivo si potrebbe qualificare come confine della regione di piano situata dalla banda di ς a cui si volge la direzione laterale positiva, il lato negativo come confine della regione situata dall' altra banda. Se ς fosse da considerarsi come un taglio operato nel piano, i lati di ς sarebbero la stessa cosa che gli orli del taglio (***). Se ς fosse data come contorno di un pezzo di piano, il suo lato positivo sarebbe l' interno.

Metteremo in questo paragrafo anche le seguenti considerazioni.

(*) Nè anche, certamente, per le determinazioni raccolte in questo paragrafo la supposizione dell' orizzontalità del piano si crederà essenziale; ma soltanto si vorrà riconoscere come agevolante la esposizione delle medesime; essendochè la distinzione fra l' una e l' altra delle due faccie, che in una superficie possono supporsi osservate, riesce così tradotta in quella, già senz' altro chiara, di *sopra* e *sotto*; rispetto alla quale si è anche già stabilito nel §. 8 che le figure nel piano debbansi supporre osservate dall' alto al basso.

(**) Questa denominazione è suggerita da quella di unità laterale positiva additata da Gauss come opportuna per $+i$.

(***) Comunque accadrà di qualificarli (come lati, cioè, o come orli), riterremo per sempre la denominazione di positivo o negativo. La quale, del resto, solo in tanto può preferirsi a quella di sinistro e destro, che pure usammo a pagg. 121-122, in quanto si considera come estensione della già applicata a $\pm i$ in confronto di 1.

Imaginando un' altro elemento lineare $d\nu$, uscente insieme con $d\varsigma$ da un punto qualunque (x, y) e nella direzione laterale positiva rispetto a $d\varsigma$, l' angolo di $d\nu$ con $d\varsigma$ può manifestamente considerarsi come una delle posizioni che potrebbe prendere l' angolo $i01$ se fosse scorrevole sopra il piano; cioè dire, mediante rotazione e traslazione quest' angolo potrebbe sovrapporsi all' altro in modo che 01 riuscisse nella direzione $d\varsigma$ e $0i$ nella direzione $d\nu$. Indicando con τ la misura della detta rotazione, ossia l'angolo di $d\varsigma$ con 01 (immoto), è chiaro che gli angoli di $d\varsigma, d\nu$ con $01, 0i$ saranno quelli indicati dalla tabella (1), ritenuto che gli angoli con $0i$ si misurino (positivamente) da $0i$ verso 01, ossia in senso contrario di quelli con 01.

(1)

	$d\varsigma$	$d\nu$
01	τ	$\frac{\pi}{2}+\tau$
$0i$	$\frac{\pi}{2}-\tau$	$-\tau$

Considerando le projezioni (dx, dy) sugli assi reale e imaginario tanto dell' elemento $d\varsigma$ quanto del $d\nu$, si hanno le note relazioni

$$\frac{dx}{d\varsigma}=\cos\widehat{\varsigma.x}\,,\quad \frac{dy}{d\varsigma}=\cos\widehat{\varsigma.y}\,;\quad \frac{dx}{d\nu}=\cos\widehat{\nu.x}\,,\quad \frac{dy}{d\nu}=\cos\widehat{\nu.y}\,.$$

Ora, avendo riguardo alla tabella (1), queste relazioni si possono presentare come segue:

$$(2)\quad \begin{aligned} &\frac{dx}{d\varsigma}=\cos\tau\,, && \frac{dy}{d\varsigma}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\tau\right)=\operatorname{sen}\tau\,,\\ &\frac{dx}{d\nu}=\cos\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)=-\operatorname{sen}\tau\,, && \frac{dy}{d\nu}=\cos(-\tau)=\cos\tau\,; \end{aligned}$$

dalle quali emergono le

$$(3)\quad \frac{dx}{d\varsigma}=\frac{dy}{d\nu}\,,\qquad \frac{dx}{d\nu}=-\frac{dy}{d\varsigma}\,.$$

La equazione fondamentale delle funzioni di una variabile complessa, cioè la $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial yi}$, presentasi ancora nello stesso aspetto, se, invece dei due differenziali della z diretti parallelamente agli assi (cioè $dz=dx$, $dz=dyi$), se ne considerino due altri qualunque, purchè le loro direzioni positive sieno tra esse come $0i$ a 01, cioè l' una sia la laterale positiva rispetto all' altra. Infatti, consideriamo i due differenziali diretti secondo

i due elementi $d\zeta$ e $d\nu$ dianzi imaginati. Questi elementi saranno i moduli dei due differenziali, mentre gli argomenti saranno rispettivamente τ e $\frac{\pi}{2}+\tau$; laonde si potrà porre, per l'uno, $dz = d\zeta . e^{i\tau}$, e per l'altro, $dz = d\nu . e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\tau\right)} = d\nu . i e^{i\tau}$. Ora, basta scrivere che il quoziente differenziale di w ottiene lo stesso valore tanto per l'una come per l'altra direzione del differenziale di z, per avere $\frac{dw}{d\zeta . e^{i\tau}} = \frac{dw}{d\nu . i e^{i\tau}}$, d'onde, moltiplicando per $e^{i\tau}$,

$$(4) \qquad \frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{d\nu\, i} \quad \text{oppure} \quad i\frac{dw}{d\zeta} = \frac{dw}{d\nu} \qquad (*).$$

A determinare la posizione dei punti in S, ossia come coordinate di un punto qualunque (x, y) si possono anche assumere la lunghezza (che riterremo espressa colla stessa s) del contorno, contata in direzione positiva da un punto fisso come origine sino ad un punto qualunque, e, nella normale al contorno in questo punto, la distanza n che corre dal medesimo ad un punto qualunque (x, y), misurata positivamente verso l'interno. Una funzione qualunque di x, y si potrà quindi concepire, al pari delle x, y stesse, come funzione di s, n. Per ciò che qui vogliamo esporre, si potrà, del resto, prendere per linea s una qualunque anche non data come contorno, purchè come direzione positiva di n si pigli la laterale positiva rispetto alla linea medesima.

Nella equazione (4) si possono far comparire le derivate parziali della w rispetto a s, n. Basta imaginare che $d\zeta$ sia l'elemento della linea $n = \text{Cost.}^e$. Nel qual caso, si può scrivere dn in luogo di $d\nu$; e, considerando i due triangoli simili aventi per basi gli archetti o elementi corrispondentisi, e quindi paralleli, $d\zeta$ e ds, ed entrambi il vertice nel centro di curvatura comune degli archetti stessi, si ha la proporzione $\frac{d\zeta}{ds} = \frac{P - n}{P}$,

(*) In luogo del fattore i comparirebbe, evidentemente, il fattore $e^{i\alpha}$, se l'angolo di $d\nu$ con $d\zeta$ fosse α invece di $\frac{\pi}{2}$.

dove con P s' intende il raggio di curvatura di ds da prendersi con segno positivo o negativo secondochè ds volga la concavità verso l' interno o verso l' esterno. Sostituendo nella (4) dn a $d\nu$ e $\frac{P-n}{P}ds$ a $d\varsigma$, si ottiene

$$\frac{iP}{P-n}\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial n} \quad (5)$$

Di questa noteremo qui il caso particolare delle coordinate polari. Imaginando che la linea s sia la circonferenza avente il centro in O e per raggio l' unità, e che l' arco s sia misurato a partire dall' asse reale, nel senso positivo degli angoli (il che è quanto supporre $s=\arg z=\omega$, $n=1-\mathrm{mod}\,z=1-r$), si avrà $P=1$, e la (5) diverrà $\frac{i}{1-n}\frac{\partial w}{\partial \omega}=-\frac{\partial w}{\partial r}$, ossia

$$\frac{1}{ri}\frac{\partial w}{\partial \omega}=\frac{\partial w}{\partial r} \quad (6)$$

Questa sarebbe l' equazione da prendersi a fondamento nello studio delle funzioni d' una variabile complessa, quando le medesime si volessero considerare piuttosto nella loro dipendenza dal modulo e dall' argomento (r, ω) che dalle parti reale e imaginaria (x, yi) della variabile. La qual maniera può vedersi praticata nel postumo *Mémoire sur la théorie des imaginaires, sur l' équilibre de température et sur l' équilibre d' élasticité* di P. A. Laurent (*).

Infine vogliasi anche riflettere che si possono estendere ad una porzione del piano z non escludente l'infinito le determinazioni e considerazioni fatte circa contorni e normali considerando una porzione S tutta situata nel finito. Per abbracciare con tutta chiarezza insieme i casi del finito e dell' infinito giova riguardare, come abbiamo detto, il piano qual superficie che si chiude all' infinito, ossia supporre la rappresentazione sferica, come fu spiegato nel §. 14. Ma in questo e nei restanti para-

(*) Questa Memoria può leggersi nel 40 *Cahier* del giornale della scuola politecnica. Nel tomo 40 (pag. 632) dei *Comptes Rendus* si troverà un breve rapporto di Cauchy all'Accademia sopra questa ed un' altra Memoria dello stesso valente matematico.

grafi della corrente *Sezione* tralascieremo i particolari che a ciò si possono riferire ; i quali , del resto , si troveranno bastantemente determinati dal contenuto del Capitolo quarto della *Sezione* ventura.

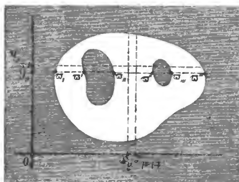
§. 71. Ritornando agli integrali, esponiamo anzitutto una trasformazione di un integrale doppio in integrale semplice; perchè da questa discenderanno poi parecchie formole importanti, non che l'annunziata seconda dimostrazione del teorema del §. 69.

Un'integrale doppio $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ esteso a tutta la superficie A (porzione di piano z) intendesi definito come limite (pei Δx e Δy tendenti a zero) della somma doppia

$$\Sigma\Sigma f(x,y)\,\Delta x\,\Delta y = \Sigma_\mu \Sigma_\nu f(x_\mu, y_\nu)[x_{\mu+1} - x_\mu][y_{\nu+1} - y_\nu]$$

formata con tutti i termini $f(x,y)\Delta x \Delta y$ che corrispondono ai punti di A determinati dalle intersezioni di due sistemi di rette parallele agli assi (Fig. 23).

Fig. 23.



Ora, consideriamo, in primo luogo, il caso in cui la $f(x,y)$ sia la derivata parziale rispetto a x di una funzione $\Psi(x,y)$ monodroma , continua e finita per tutti i punti di A. Nell'integrale doppio o superficiale

$$\int\int \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy\ ,$$

esteso a tutta la A, la integrazione rispetto a x si può subito attuare , e così ottenere un integrale semplice o lineare da prendersi lungo a (contorno di A).

A tal fine consideriamo il sistema delle parallele all'asse delle x. Queste parallele dividono A in striscie elementari, composte ciascuna di uno o più pezzi trapezoidali separati. Prendendo di mira una qualunque di siffatte striscie (e sia quella segnata nella fig. 23), è chiaro che le parallele che la racchiudono (distanti l' una y e l' altra $y+dy$ dall'asse delle x) traversano un numero pari di volte il contorno a, entrando ed uscendo almeno una volta dalla superficie A. Sieno ordinatamente

$$\varpi_{,}\,,\ \varpi_{,,}\,,\ \varpi_{,,,}\,,\ \ldots\,;\ \varpi'\,,\ \varpi''\,,\ \varpi'''\,,\ \ldots$$

i punti d'entrata e quelli d'uscita dell'una parallela diretta nel senso positivo delle x, e

$$\Psi_{,}\,,\ \Psi_{,,}\,,\ \Psi_{,,,}\,,\ \ldots\,;\ \Psi'\,,\ \Psi''\,,\ \Psi'''\,,\ \ldots$$

i valori di Ψ in questi punti. L' integrale elementare

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx\, dy\,,$$

relativo alla striscia in considerazione, non è altro che il prodotto di dy (costante, come y, lungo tutta la striscia) per l' integrale

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx$$

da prendersi lungo i tratti $\varpi_{,}\varpi'$, $\varpi_{,,}\varpi''$, $\varpi_{,,,}\varpi'''$, ... Ora, essendo Ψ monodroma, continua e finita in tutti i punti di A e quindi, in particolare, anche lungo gli anzidetti tratti, sarà

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx = \Psi' + \Psi'' + \Psi''' + \ldots - \Psi_{,} - \Psi_{,,} - \Psi_{,,,} - \ldots\,,$$

comunque la derivata $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$ possa comportarsi (*), e però sarà anche

(*) Considerando, per esempio, il tratto $\varpi_{,}\varpi'$, se lungh' esso anche la derivata fosse continua e finita, è notissimo che il risultato della integrazione sarebbe $\Psi' - \Psi_{,}$. Ora, sebbene non abbiamo creduto opportuno di impegnarci nel cominciamento di questo Capitolo in veruna indagine generale del quando e del come sussista il concetto d' integrale d' una funzione che fra i limiti di esso presenti delle singularità, ci sia nondimeno permesso di far qui notare come si possa tosto conchiudere che la suddetta integrazione serba significato, e precisamente ancora quello espresso da $\Psi' - \Psi_{,}$, anche supponendo che nell' intervallo della medesima la derivata presenti una o più singolarità, qualora si faccia uso della formola

$$\int_{x_{,}}^{x'} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx = \lim_{\substack{\varepsilon=0\\ \eta=0}} \left[\int_{x_{,}}^{c-\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx + \int_{c+\eta}^{x'} \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, dx \right],$$

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx\, dy = \Psi' dy + \Psi''' dy + \Psi'''' dy + \ldots - \Psi_{,} dy - \Psi_{,,} dy - \Psi_{,,,} dy - \ldots$$

Introduciamo in questo secondo membro, in luogo dell'incremento $dy = y_{\nu+1} - y_\nu$, per definizione positivo in tutti i termini, quale effettivamente risulta passando dalla parallela $\varpi_{,}\varpi'\varpi_{,,}\varpi''\varpi_{,,,}\varpi'''$ all' altra che con essa determina la striscia, gli incrementi dy che debbano essere ora positivi ed ora negativi e precisamente quali risultano effettuando il passaggio dall' una all' altra parallela sopra il contorno di A nella sua direzione positiva. Gli incrementi, intesi in questo senso, risultano negativi nei punti d' entrata e positivi nei punti d' uscita, ciò che possiamo esprimere con

$$dy = -dy_{,} = dy' = -dy_{,,} = dy'' = -dy_{,,,} = dy''' = \ldots$$

E però la loro introduzione farà scomparire l' alternazione dei segni, e si avrà

$$\int \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \Psi' dy' + \Psi'' dy'' + \Psi''' dy''' + \ldots$$
$$+ \Psi_{,} dy_{,} + \Psi_{,,} dy_{,,} + \Psi_{,,,} dy_{,,,} + \ldots ;$$

e, sommando con questa tutte le eguaglianze analoghe relative a tutte le altre striscie di A, la somma dei secondi membri abbraccierà i prodotti Ψdy relativi a tutti quanti i punti di ogni parte del contorno supposto percorso in direzione positiva,

dove e denota valore di x pel quale ha luogo una singularità (e basta considerarne una, analoga dimostrazione valendo per più); formola che, esistendo il limite in essa designato, si sa essere adottata universalmente. Poichè la derivata supponesi continua e finita da $x_{,}$ a $e-\varepsilon$ e da $e+\eta$ a x', si ha

$$\int_{x_{,}}^{e-\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \Psi(e-\varepsilon, y) - \Psi(x_{,}, y), \quad \int_{e+\eta}^{x'} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \Psi(x', y) - \Psi(e+\eta, y) ;$$

e però

$$\int_{x_{,}}^{x'} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \lim \left[\Psi(e-\varepsilon, y) - \Psi(x_{,}, y) + \Psi(x', y) - \Psi(e+\eta, y) \right] .$$

Mo, poichè la Ψ supponesi continua e finita anche per $x = e$, si ha

$$\lim \left[\Psi(e-\varepsilon, y) - \Psi(e+\eta, y) \right] = \Psi(e, y) - \Psi(e, y) = 0 ;$$

dunque

$$\int_{x_{,}}^{x'} \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx = \Psi(x', y) - \Psi(x_{,}, y) .$$

quindi si avrà

(1) $$\int\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx\, dy = \int_a \Psi\, dy\ ,$$

dove colla lettera A, posta al piede dell'integrale doppio, vuolsi ricordare ch' esso va esteso alla superficie A, mentre il semplice va preso lungo il contorno a.

Considerando, in secondo luogo, il caso in cui la $f(x, y)$ sia la derivata parziale rispetto a y di una funzione $\Phi(x, y)$ monodroma, continua e finita, come la $\Psi(x, y)$, per tutti i punti di A, si otterrà, analogamente alla (1), la seguente eguaglianza

(2) $$\int\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy\, dx = -\int_a \Phi\, dx\ .$$

Manifestamente il segno negativo, dinanzi all'integrale del secondo membro, è dovuto a questo, che guardando da 0 nella direzione positiva delle y si ha la direzione positiva delle x alla destra e non alla sinistra; laonde, per trovarsi rispetto alle y nelle identiche circostanze in cui si era precedentemente rispetto alle x, sarebbe stato d' uopo supporre, nella formazione dell' integrale semplice di Φdx, il contorno percorso in guisa da lasciare la superficie A sempre a destra.

Ritenendo indicata colla stessa lettera a la lunghezza della porzione variabile di contorno, contata da un punto fisso come origine in direzione positiva sino al punto qualunque, e ricordando che nelle (3) del § precedente, come nella tabella (1) e nelle (2), si può imaginare che $d\varsigma$ divenga un' elemento del contorno e quindi $d\nu$ l' elemento della corrispondente normale interna (cioè qui supporre $d\varsigma = da$, $d\nu = dn$), i due risultati testè ottenuti si potranno anche presentare come segue

(1') $$\int\int_A \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx dy = \int_a \Psi \frac{\partial y}{\partial a} da = -\int_a \Psi \frac{\partial x}{\partial n} da\ ,$$

(2') $$\int\int_A \frac{\partial \Phi}{\partial x} dy dy = -\int_a \Phi \frac{\partial x}{\partial a} da = -\int_a \Phi \frac{\partial y}{\partial n} da\ .$$

Sottraendo i due risultati stessi l' uno dall' altro, si ha

(3) $$\int\!\!\int_A \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_a (\Phi\, dx + \Psi\, dy) \quad .$$

Notiamo, siccome discendenti da questa, le seguenti eguaglianze, delle quali avremo da far uso più tardi.

Ponendo

$$\Psi = \sigma \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad -\Phi = \sigma \frac{\partial u}{\partial y}$$

e servendosi delle decomposizioni

$$\frac{\partial \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \, ,$$

$$\frac{\partial \left(\sigma \frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \, ,$$

si ottiene

(4) $$\int\!\!\int_A \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dx\, dy$$

$$= \int_a \sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx\right] - \int\!\!\int_A \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx dy \, .$$

Analogamente, ponendo

$$\Psi = \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) \quad , \quad -\Phi = \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) ,$$

si ottiene

(5) $$\int\!\!\int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right] dx dy$$

$$= \int_a \sigma \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial y}\right) dy - \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) dx\right] - \int\!\!\int_A \sigma \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx dy \, .$$

Ponendo (sempre nella (3), e sempre, ben' inteso, nel supposto che risultino soddisfatte le condizioni ammesse in principio per Φ e Ψ)

$$\Psi = u\frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \Phi = u\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

ed osservando che in questo caso risulta

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

si ottiene

$$(6)\quad \int\!\!\int_A \left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right] dx\,dy = \int_a u\left(\frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx\right) = \int_a u dv\ .$$

Se u e vi fossero le parti reale e imaginaria di una funzione della variabile complessa $x+yi$, allora, per le note relazioni

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}\ ,\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}\ ,$$

quest' ultima eguaglianza potrebbe anche presentarsi sotto i seguenti aspetti

$$(7)\qquad \int\!\!\int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_a u dv$$

$$(8)\qquad \int\!\!\int_A \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_a u dv\ .$$

Scambiando nella (6) le lettere u e v tra loro, si ottiene il primo membro medesimo cambiato di segno; lo stesso cambiamento si trasmetterebbe ai primi membri della (7) e (8), e però si avrebbero le

$$(9)\qquad -\int\!\!\int_A \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_a v du\ ,$$

$$(10)\qquad -\int\!\!\int_A \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \int_a v du\ ,$$

le quali seguirebbero dalle (7), (8) anche pel riflesso che, essendo supposte le u, v, e quindi anche la uv, monodrome, con-

tinue e finite per tutta A, la differenza tra i valori di uv al principio e al termine della integrazione lungo a è nulla, per cui si ha

$$\int_a d(uv) = \int_a (udv + vdu) = 0.$$

La seconda dimostrazione del teorema del §. 69 discende pure dalla eguaglianza (3). Cominciamo a riflettere che ne discende il

Teorema. *Se Φ e Ψ sono funzioni di x e y monodrome, continue e finite per tutta la superficie A, e se quivi $\Phi dx + \Psi dy$ è un esatto differenziale totale, l'integrale*

$$\int_a (\Phi dx + \Psi dy)$$

è nullo.

Imperocchè, se Φ e Ψ sono le derivate parziali, la prima rispetto a x e l'altra rispetto a y, di una medesima funzione $F(x,y)$, si ha

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y},$$

per cui è nulla la quantità sulla quale nel primo membro della (3) sta espressa la doppia integrazione.

Riflettiamo, in secondo luogo, che la (3), non che l'esposto teorema, sussiste se anche Φ e Ψ sieno funzioni complesse delle variabili x e y. Non abbiamo, infatti, nè anche enunciata precedentemente la supposizione che Φ e Ψ fossero reali. Del resto, applicando la formola (3) in prima alle parti reali di Φ e Ψ e poi ai coefficienti di i, e sommando il primo risultamento col secondo moltiplicato per i, si otterrebbe subito la (3) per Φ e Ψ funzioni complesse.

Riflettendo infine che, se $w(z)$ sia funzione di $z = x + yi$ monodroma, continua e finita per tutta la superficie A, nel teorema precedente si può supporre

$$\Phi = w \quad , \quad \Psi = iw ;$$

poichè la condizione

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = i \frac{\partial w}{\partial x}$$

è soddisfatta; si conchiuderà essere nullo l' integrale

$$\int_a (wdx + iwdy) = \int_a w(dx + idy) = \int_a wdz \ ,$$

nel che consiste appunto il teorema del §. 69.

§. 72. Ripigliamo ora la deduzione delle più prossime conseguenze di questo teorema.

Perciò imaginiamo data in una porzione del piano z una funzione w, monodroma, continua e finita, in generale; o, in altri termini, imaginiamo in ciascun punto di detta porzione deposto un valore per w il quale sia finito e vari da punto a punto in modo da soddisfare la $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$, senza però escludere eccezioni per punti o linee particolari. Designiamo con S cotesta porzione, o piuttosto una sua parte qualsia, che potremo anche imaginare ora ristretta ed ora ingrandita a piacimento; sempre, ben inteso, entro i confini della porzione suddetta, poichè fuori di essa non presupponiamo nemmeno che w esista.

Potendo esistere in S degli infiniti e delle discontinuità di w, il valore dell' integrale di wdz preso lungo il contorno di S potrà anche non essere nullo. Comunque sia, esso non varierà operando in S un taglio qualunque che non traversi nè infiniti nè discontinuità (cioè dire, come al solito, punti nei quali abbiano luogo queste singularità) di w, ed effettuando la integrazione lungo il contorno della nuova figura che ne risulta. Infatti questo nuovo contorno non è altro che il contorno di prima colla giunta dei due orli del taglio. L' integrale preso lungo il nuovo contorno è dunque eguale all' integrale di prima colla giunta dei due integrali presi lungo i due orli. Ma la somma di questi due ultimi integrali è nulla, avendo essi valori contrari, siccome integrali del differenziale monodromo wdz da prendersi lungo

una stessa linea (linea del taglio) nelle due contrarie direzioni ((1) del §. 68) (*).

Dopo l'attuazione di un taglio la superficie S, originariamente supposta di un solo pezzo, potrebbe constare ancora di un solo pezzo, come, per esempio, avvenne con ciascuno dei tagli operati nel pezzo A della fig. 22; ovvero trovarsi divisa in due o più pezzi, come avverrebbe di un cerchio tagliandolo lungo una intiera corda o lungo una qualunque linea rientrante tracciata entro di esso. Se, per effetto di un taglio, la S riuscisse divisa in due pezzi, l'integrale preso lungo il nuovo contorno potrebbe riguardarsi come la somma dei due integrali presi lungo i contorni dei singoli pezzi. Cioè si potrebbe asserire che, tagliando una superficie S in due pezzi, l'integrale preso lungo il contorno di S equivale alla somma degl'integrali presi separatamente lungo i contorni dei due pezzi. Questa proposizione manifestamente sussiste in qualunque numero di pezzi si divida S, cioè sussiste il seguente

Teorema. *L'integrale di wdz preso lungo il contorno di S equivale alla somma degli integrali presi lungo i contorni di tutti quei pezzi nei quali piaccia di dividere S mediante tagli che non traversino singularità di w.*

Per quei pezzi che non contenessero singularità l'integrale sarebbe nullo; quindi possiamo anche enunciare i seguenti teoremi.

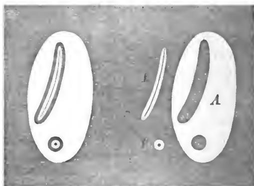
Teorema. *Il valore dell' integrale di wdz da prendersi lungo il contorno di una porzione di piano z rimane sempre lo stesso togliendo od aggiungendo alla medesima qualsiasi numero di parti dove non esistano discontinuità o infiniti di w.*

Teorema. *L'integrale di wdz preso lungo il contorno di S equivale alla somma degli integrali presi lungo i contorni di quei soli pezzi, provenienti dal dividere S, nei quali sianvi discontinuità o infiniti di w.*

(*) Egli è affatto evidente, che i due orli, come parti del contorno della nuova figura, vanno percorsi l'uno in un senso e l'altro nel senso contrario, affinchè la superficie racchiusa si trovi sempre a sinistra.

Questo teorema permette di ridurre l'integrale preso lungo il contorno di S alla somma di tanti integrali elementari quanti sono i punti e le linee dove w è infinita o discontinua. Basta imaginare la superficie S divisa mediante tagli in pezzi $P_1, P_2, \ldots$ $L_1, L_2, \ldots$ (come P e L nella fig. 24) contenenti ciascuno

Fig. 24.



esclusivamente un punto od una linea dove w sia discontinua od infinita, ed in un pezzo A scevro affatto da coteste singularità della w. L'integrale preso lungo il contorno di A è nullo, ed il teorema precedente dice che

$$\int_s wdz = \int_{p_1} wdz + \int_{p_2} wdz + \ldots + \int_{l_1} wdz + \int_{l_2} wdz + \ldots,$$

dove p, l significano i contorni dei pezzi P, L, ossia, lasciando in disparte le idee sussidiarie di tagli e di pezzi, significano linee con cui si imaginano circondate le singularità della w. Ognuno di questi integrali elementari (cioè presi lungo queste linee p, l) conserva lo stesso valore comunque la rispettiva linea di integrazione si stringa, senza confondervisi, attorno al punto od alla linea della singularità in essa racchiusa (*).

(*) Una dimostrazione della inalterabilità dell'integrale allo stringersi ed in generale al deformarsi (colla solita condizione) di un cammino chiuso, come nel presente caso, fu già data alla fine del §. 69.

Ritornando a considerare il simbolo

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{\mathbf{z}} w dz \ ,$$

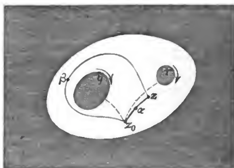
dove z_0 e $\mathbf{z}$ esprimano punti di S, si può comporre una formola la quale esprima che cosa sieno, in confronto di uno, tutti i possibili valori che questo simbolo può prendere col mutare del cammino d' integrazione, sempre s' intende da z_0 a $\mathbf{z}$ entro S. Sebbene, pel già esposto, sia affatto ovvio il conseguire tale formola, pure entreremo a suo riguardo in qualche particolare.

In primo luogo osserveremo che, se S non contenesse singularità di w ed il suo contorno consistesse di una sola linea rientrante (come, per esempio, nel caso di un cerchio o di un rettangolo), l' integrale (1) conserverebbe sempre lo stesso valore per qualunque cammino di integrazione (poichè da uno scelto a volontà si potrebbe ottenere qualunque altro cammino mediante deformazioni non sorpassanti singularità di w), e la formola sarebbe semplicemente l' integrale (1) stesso preso lungo un cammino prefissato a piacimento. Considerando il limite superiore come variabile, o, ciò ch' è lo stesso, ritenendo $\mathbf{z} = z$, l' integrale (1) esprimerebbe una funzione di z monodroma, continua e finita dappertutto in S, come la propria derivata w.

Prendiamo invece a considerare, in secondo luogo, il caso in cui S, pur non contenendo singularità di w, non abbia il contorno composto di una sola linea rientrante. In tal caso non si può più asserire, in generale, che tutti i cammini conducenti da z_0 a $\mathbf{z}$ produrranno lo stesso valore per l' integrale; imperocchè non tutti i cammini potranno ottenersi da un solo mediante le solite deformazioni.

Sia, per fissar le idee, il caso particolare della S rappresentata nella fig. 25. Il suo contorno è composto di tre parti

Fig. 25.



separate, cioè della parte o linea maggiore, che in sè abbraccia tutta quanta la figura, e delle due linee minori, le quali, come parti del contorno di S e però dirette nel senso delle freccie, designeremo con $-q$ e $-r$; volendo che q e r significhino le linee medesime dirette nel senso positivo degli angoli.

Un cammino quale $z_0\beta\mathbf{z}$ non può ridursi ad un cammino prefissato $z_0\alpha\mathbf{z}=l$, mediante deformazioni infinitesime senza uscire da S, a cagione del manco circoscritto dalla linea q. Però, se non al solo l, il cammino $z_0\beta\mathbf{z}$ può ridursi all' aggregato di un cammino che non varia con $\mathbf{z}$ e del cammino l. Si tiri da z_0 ad un punto di q una linea (che rappresentiamo tratteggiata nella figura) e si indichi con q_0 il cammino rientrante che risulta percorrendo la detta linea da z_0 a q, indi la q e finalmente la linea stessa da q a z_0. E con $-q_0$, come al solito, il medesimo cammino percorso in direzione contraria (*). Ciò premesso, il cammino $z_0\beta\mathbf{z}$ può ridursi al cammino $-q_0+l$, di cui la parte $-q_0$ è, come anticipammo, indipendente da $\mathbf{z}$. Siffatta riducibilità si riconosce aggiungendo a $z_0\beta\mathbf{z}$ il cammino

(*) Se la linea da z_0 a q si concepisse come taglio operato nella superficie, il cammino q_0 potrebbe dirsi costituito dall' orlo negativo (di esso taglio), dalla linea q e dall' orlo positivo.

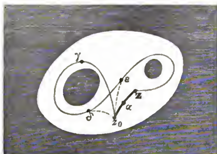
$-l+l$, perchè ne risulta

$$z_0 \beta \mathbf{z} = z_0 \beta \mathbf{z} + \mathbf{z} \alpha z_0 + l = z_0 \beta \mathbf{z} \alpha z_0 + l ,$$

ed è affatto evidente che la parte $z_0 \beta \mathbf{z} \alpha z_0$ è riducibile a $-q_0$.

Si tiri da z_0 una linea anche ad un punto di r, e si indichi con r_0 il cammino rientrante, analogo al q_0, relativo ad r. Si riconosce facilmente che, per esempio, il cammino $z_0 \gamma \delta \varepsilon \mathbf{z}$ (Fig. 26) (*) si riduce al cammino $q_0 - r_0 + l$. Basta osservare

Fig. 26.



che, deformando una porzione $\delta\varepsilon$ di esso cammino sino a raggiungere z_0 (deformazione tratteggiata nella figura), ed aggiungendo $-l+l$, si ha

$$z_0 \gamma \delta \varepsilon \mathbf{z} = z_0 \gamma \delta z_0 + z_0 \varepsilon \mathbf{z} \alpha z_0 + l ,$$

dove è evidente che le parti $z_0 \gamma \delta z_0$, $z_0 \varepsilon \mathbf{z} \alpha z_0$ sono rispettivamente riducibili a q_0, $-r_0$.

Da questi esempi si rileva ormai chiaramente che qualunque cammino da z_0 a $\mathbf{z}$ si può ridurre ad una successione di cammini elementari delle quattro sorta $q_0, -q_0, r_0, -r_0$ ed al cammino l. Il valore dell'integrale (1) riuscirà dunque in ogni caso composto di certi numeri di volte gli integrali di wdz presi lungo $q_0, -q_0, r_0, -r_0$ e dell'integrale preso lungo l; e però, essendo

$$\int_{-q_0} wdz = -\int_{q_0} wdz \quad , \quad \int_{-r_0} wdz = -\int_{r_0} wdz \; ,$$

(*) Soltanto per maggior chiarezza rappresentiamo questo cammino in una nuova anzichè nella stessa figura 25.

il valore dell'integrale (1) si potrà sempre compendiare nella forma seguente

$$\int_{z_0}^{z} w dz = \int_{l} w dz + m \int_{q_0} w dz + n \int_{r_0} w dz ,$$

dove m, n significano numeri interi (positivi o negativi).

Ora riflettiamo altresì che l'integrazione di wdz lungo q_0 dà lo stesso risultato dell'integrazione soltanto lungo q; poichè, integrando lungo la linea imaginata da z_0 a q prima in un senso e poi nel contrario, si hanno risultamenti contrari, la cui somma è quindi zero. Altrettanto si verifica per la integrazione lungo r_0 e lungo r. Perciò, invece della formola precedente, potremo scrivere la

$$\int_{z_0}^{z} w dz = \int_{l} w dz + m \int_{q} w dz + n \int_{r} w dz .$$

È questa, pel caso della S della fig. 25, la formola che dicemmo potersi sempre comporre a rappresentare tutti i possibili valori che il simbolo (1) ammette per la indefinita varietà dei cammini tracciabili in S.

Nel caso particolare contemplato, il simbolo (1) non esprime una funzione di z *monodroma* in S se non quando le costanti

$$\int_{q} w dz \quad , \quad \int_{r} w dz$$

siano nulle.

Consideriamo finalmente, in terzo luogo, il caso di una S contenente delle singularità di w. Circondando le singularità con altrettante linee $p_1, p_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$, come già si è visto nella fig. 24, rientreremo, in quanto al ritrovamento della formola generale, nel caso precedente; giacchè possiamo anche riguardare i pezzi $P_1, P_2, \ldots, L_1, L_2, \ldots$, come staccati da S. Ritenendo noverate fra le $p_1, p_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$ anche le parti interne (come le q, r di poc' anzi) del contorno totale di S, e designando con $m_1, m_2, \ldots, n_1, n_2, \ldots$ dei numeri in-

teri arbitrari, avremo, come formola generale, la

$$(2)\ \int_{z_0}^{\mathbf{z}} w\,dz = \int_{l} w\,dz + m_1 \int_{p_1} w\,dz + m_2 \int_{p_2} w\,dz + \ldots + n_1 \int_{l_1} w\,dz + n_2 \int_{l_2} w\,dz + \ldots$$

Negli esposti teoremi si hanno mezzi fecondi per trasformare e valutare integrali definiti. Accade spesso che il valore di un'integrale, preso da un punto $z = z_0$ ad altro punto $z = \mathbf{z}$ lungo opportuno cammino, si possa facilmente determinare. E però, in tal caso, anche il valore che esso integrale assumerà per altro cammino da z_0 a $\mathbf{z}$ si farà noto, giusta la formola (2), tostochè siano trovati i valori forniti dalla integrazione lungo quelle linee chiuse elementari che fossero per occorrere nella riduzione dell' un cammino all'altro. Ma, contentandoci di ricordare a questo riguardo la citata Memoria di Cauchy *Sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires* (*Notizie*, pag. 72), noi qui scenderemo senz' altro a considerare, siccome in special modo utile per il seguito, l' integrale della funzione semplice $\frac{1}{z}$.

§. 73. La funzione $w = \frac{1}{z}$ e la derivata $-\frac{1}{z^2}$ sono a un valore e continue per tutti i valori di z ed infinite per $z = 0$.

La S sia ora tutto intero il piano z, e cerchiamo la formola esprimente tutti i possibili valori dell' integrale

$$(1)\qquad \int_1^{\mathbf{z}} \frac{dz}{z}\ ,$$

che, ove $\mathbf{z}$ fosse reale e positiva, ed il cammino d'integrazione fosse la retta (porzione d' asse reale) che va da 1 a $\mathbf{z}$, equivarrebbe, come si sa, al logaritmo naturale e reale di $\mathbf{z}$.

Qualunque cammino da 1 a $\mathbf{z}$ può ridursi ad un certo numero di giri positivi o negativi intorno al punto 0 e al cammino rettilineo da 1 a $\mathbf{z}$. Perciò, designando con l il cammino rettilineo, e con a una linea semplice rientrante che circonda

il punto 0, si potrà tenere come formola richiesta, cioè come formola (2) del § precedente, la

$$(2)\qquad \int_1^{\mathbf{z}} \frac{dz}{z} = \int_l \frac{dz}{z} + m \int_a \frac{dz}{z}\,.$$

Il valor costante dell' integrale preso lungo a si riconosce subito eguale a $2\pi i$. Basta introdurre in esso integrale $re^{\omega i}$ in luogo di z, e riflettere che, supposto a circonferenza di centro 0, r non varia durante la integrazione, mentre ω cresce di 2π. Sarà dunque per siffatta integrazione

$$dz = re^{\omega i} i d\omega \quad , \quad \frac{dz}{z} = i d\omega$$

e

$$(3)\qquad \int_a \frac{dz}{z} = i \int_a d\omega = 2\pi i \quad .$$

La formola (2) può quindi scriversi come segue

$$(4)\qquad \int_1^{\mathbf{z}} \frac{dz}{z} = \int_l \frac{dz}{z} + 2\pi i m\,.$$

Anche dell' integrale rettilineo è tosto riconosciuto il valore. Riflettiamo che, mentre z va dal punto 1 al punto $\mathbf{z}$, il modulo di z (ossia la retta $\overline{0z}$) da $\mathrm{mod}\,1 = 1$ diventa $\mathrm{mod}\,\mathbf{z}$, e l' argomento principale di z (ossia l' angolo di $\overline{0z}$ con $\overline{01}$) da zero diventa l' argomento principale di $\mathbf{z}$. Ritenuto pertanto che nelle formole

$$z = re^{\omega i} \quad , \quad \mathbf{z} = \mathbf{r} e^{\boldsymbol{\omega} i}$$

le lettere $\omega, \boldsymbol{\omega}$ significhino esclusivamente gli argomenti principali, si avrà:

$$dz = e^{\omega i} dr + re^{\omega i} i d\omega \quad , \quad \frac{dz}{z} = \frac{dr}{r} + i d\omega \quad ,$$

(5) $$\int_1^z \frac{dz}{z} = \int_1^{\mathbf{r}} \frac{dr}{r} + i\int_0^{\omega} d\omega = l\mathbf{r} + i\omega \quad ,$$

in cui $l\mathbf{r}$ significa il logaritmo naturale, principale (ossia reale) di $\mathbf{r}$ (*).

La formola (4) può quindi presentarsi nel seguente aspetto

(6) $$\int_1^z \frac{dz}{z} = l\mathbf{r} + i\omega + 2\pi i m \quad .$$

Se in questa formola si restituisse a ω il significato di argomento qualsiasi di $\mathbf{z}$, un multiplo arbitrario di 2π verrebbe ad essere già sottinteso in ω, e il secondo membro potrebbesi anche scrivere semplicemente come segue: $l\mathbf{r}+i\omega$. Comunque si scriva, concludiamo che il simbolo (1) ha tutti e soli i valori del simbolo $l\mathbf{z}$, ossia che sussiste, come anticipammo nel §. 15, la eguaglianza

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = lz \ .$$

L' integrale rettilineo, siccome quello che ha per coefficiente di i l'argomento principale, equivale al logaritmo principale.

La funzione

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)} \ ,$$

quando sia $\mathrm{mod}\,(z-1)<1$, cioè il punto z giaccia entro il cerchio che ha per centro il punto 1 e per raggio l'unità, può svolgersi, come è noto, nella serie

$$\frac{1}{z} = 1-(z-1)+(z-1)^2 - \ldots\ldots \ .$$

Integrando secondo una linea qualunque tracciata nel detto cer-

(*) Già s' intende che $\mathbf{z}$ non cada nella parte negativa dell' asse reale. Cadendovi, si sa che l' integrale rettilineo rimarrebbe indeterminato.

chio da 1 a z, si avrà, giusta il §. 49,

$$\int_1^z \frac{1}{z} dz = \int_1^z dz - \int_1^z (z-1)dz + \int_1^z (z-1)^2 dz - \dots .$$

Se nel cammino d' integrazione si sorpassassero i confini del cerchio, ciascuno degli integrali del secondo membro prenderebbe ancora sempre lo stesso valore finale, dato dalla formola

$$\int_1^z (z-1)^m = \frac{(z-1)^{m+1}}{m+1} \quad (m \text{ intero positivo.}$$

Ma non così l' integrale formante il primo membro, perchè allora il cammino potrebbe girare intorno all'infinito della funzione $\frac{1}{z}$, che è nel punto 0 del piano. Rimanendo entro il cerchio, il cammino può sempre ridursi al rettilineo senza sorpassare il punto 0; dunque anche nel primo membro l' integrale è od equivale al rettilineo ed esprime il logaritmo principale di z. E però il logaritmo principale di z può svolgersi nella serie

$$(z-1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \frac{(z-1)^3}{3} - \dots$$

per $\mathrm{mod}(z-1) < 1$; ovvero, posto $z = 1 + \mathfrak{Q}$, per $\mathrm{mod}\,\mathfrak{Q} < 1$, la serie

$$\mathfrak{Q} - \frac{\mathfrak{Q}^2}{2} + \frac{\mathfrak{Q}^3}{3} - \dots$$

equivale al logaritmo principale di $1+\mathfrak{Q}$, come si è ammesso nel §. 62.

L' integrale (1) può prendere una infinità di valori per ogni valor di z. Ma, se si riflette che questa moltiplicità di valori proviene dalla varietà dei possibili cammini d'integrazione, si scorge subito che, limitando cotesta infinita varietà di cammini, si può far sì che l' integrale riesca funzione monodroma di z. Questo è precisamente quanto già dicemmo alla fine del §. 37, dove non l'integrale (1) ma la funzione equivalente lz (ivi propriamente lw) veniva presa in considerazione. Bastò isolare uno fra gli infiniti strati generati dalla R_w. Ma non è inu-

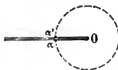
tile il ristare ancora qui su questo punto, riguardando la funzione come generata dalla integrazione.

Prendendo, come luogo S_1 del punto z, il solito piano ma tagliato lungo una linea t che da 0, senza intersecare se medesima, vada all' infinito, tutti i cammini da 1 a z, che z potrebbe percorrere entro S_1, sono riducibili ad un solo senza sorpassare il punto 0; e però l' integrale (1) riesce in S_1 funzione monodroma di z. Imaginiamo che, partendo da 1, la z passi ad occupare successivamente tutti i punti di S_1 e che in ciascun punto si deponga il valore prodottosi per l' integrale (1). La superficie S_1 riuscirà coperta da un sistema di valori varianti con continuità da punto a punto e dappertutto finiti tranne nel punto 0 e all' infinito. Ma osserviamo che i valori lungo l' orlo negativo del taglio supereranno di $2\pi i$ quelli lungo l' orlo positivo.

Per avere la differenza tra i valori dell' integrale in due punti qualsiansi α, α' basta calcolare il valore che l' integrale stesso prende lungo una linea continua tracciata da α ad α'. Ed invero, si può sempre supporre che originariamente dal punto 1 la z siasi portata ad α, e da qui, per la detta linea, ad α'. Il valore che in α' giungerà a prodursi per l' integrale consterà del valore prodottosi in α e di quello prodottosi durante il percorrimento della linea stessa.

Venendo al nostro caso particolare, α e α' siano punti combaciantisi (Fig. 27), il primo nell' orlo positivo e il secondo nel negativo, e la linea dall' uno all' altro punto sia la circonferenza che ha il centro in 0. La formola (3) dichiara che lungo la circonferenza, qui pure percorsa nel senso positivo degli angoli, si produrrà il valore $2\pi i$, appunto come testè asserimmo.

Fig. 27 (*)



(*) Come al solito, α e α', considerati come numeri, sono identici. Se, come intendesi espresso nella figura, il taglio sarà fatto secondo la parte negativa dell' asse reale, i valori che riusciranno deposti su S_1 saranno dappertutto quelli del logaritmo principale di z.

Questo salto ($2\pi i$) nel valore da α ad α' non sarebbe da considerarsi in S_1 come una discontinuità; in quanto che la z, come tenuta a muoversi in S_1, non potrebbe traversare il taglio, e da α ad α' non potrebbe andare che per una linea di lunghezza finita (come, ad esempio, la circonferenza di poc'anzi), lungo la quale il valor della funzione passa in modo continuo dalla grandezza che ha in α a quella che ha in α'.

Se, invece, adesso ritorneremo a considerare come luogo del punto mobile z il piano non tagliato, ossia imagineremo ricongiunti in tutta la loro lunghezza i due orli del taglio, conservando in ogni punto il valore già depostovi per la funzione integrale; allora la variabile potrà traversare la linea t, e, ciò facendo, la funzione cambierà bruscamente di $2\pi i$ nel proprio valore. L' imaginato sistema di valori coprenti tutto intero il piano z costituirà in tal caso una funzione da qualificarsi come *discontinua lungo tutta la linea t*.

La costante $2\pi i$, come differenza tra i valori che la funzione possiede nell'un lato e quelli che possiede nell'altro lato della linea o taglio t, vien denominata, giusta il sig. Riemann, *modulo di periodicità* di essa funzione.

§. 74. Consideriamo anche il caso dell'integrale di $\frac{dz}{z^2+1}$.
La funzione $\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{(z-i)(z+i)}$ e la propria derivata $-\frac{2z}{(z^2+1)^2}$ sono funzioni a un valore e continue per tutti i valori di z e infinite per $z=i$ e $z=-i$.

La S sia qui pure tutto intero il piano z, e cerchiamo la formola esprimente tutti i possibili valori dell' integrale

$$\int_0^{\mathbf{z}} \frac{dz}{z^2+1} \quad . \tag{1}$$

Qualunque cammino da 0 a $\mathbf{z}$ può ridursi ad una somma di giri intorno ai punti i e $-i$ e ad un cammino l prefissato da 0 a $\mathbf{z}$, qual sarebbe il rettilineo, ritenendo che $\mathbf{z}$ non cada nel-

l' asse imaginario a distanza da 0 maggiore dell' unità. Perciò, designando con a e b due circonferenze descritte intorno ai punti i e $-i$, la formola richiesta sarà

$$(2) \int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \int_l \frac{dz}{z^2+1} + m_1 \int_a \frac{dz}{z^2+1} + m_2 \int_b \frac{dz}{z^2+1} \; .$$

I valori degli integrali lungo a e b si trovano subito come nel § precedente. Per l' integrale lungo a, ponendo $z-i=Re^{i\Omega}$ si avrà

$$\frac{dz}{z-i} = i d\Omega \quad ,$$

$$\int_a \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = i \int_a \frac{d\Omega}{z+i} \; .$$

E, riflettendo che la circonferenza a può stringersi quanto piace intorno al punto i, e che allo stringersi di essa la z tende ad avere il valore i per tutto il corso dell' integrazione, ed il fattore $\frac{1}{z+i}$ il valore $\frac{1}{2i}$, si conchiuderà

$$(3) \qquad \int_a \frac{dz}{z^2+1} = \frac{i}{2i} \int_a d\Omega = \frac{2\pi i}{2i} = \pi \; .$$

L' integrale lungo b, ponendo $z+i=Re^{i\Omega}$, si troverà eguale a $-\pi$. La formola (2) può dunque scriversi come segue

$$\int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \int_l \frac{dz}{z^2+1} + m_1 \pi - m_2 \pi \quad ,$$

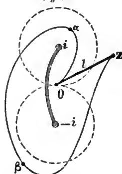
o, compendiando, giacchè è lecito, i due ultimi termini in un solo, come segue

$$(4) \qquad \int_0^z \frac{dz}{z^2+1} = \int_l \frac{dz}{z^2+1} + m\pi \quad .$$

L' integrale (1) è dunque suscettibile di una infinità semplice di valori.

Anch' esso si comporterà da funzione monodroma, se si limiti opportunamente la varietà dei cammini di z. Prendiamo come luogo S_1 del punto mobile z il piano tagliato secondo una linea t che, senza intersecare se medesima, vada dal punto i al punto $-i$ (Fig. 28). Tracciato un cammino l da 0 a $\mathbf{z}$, tutti gli altri cammini, pure da 0 a $\mathbf{z}$ tracciabili in S_1, si potranno ridurre semplicemente al cammino l, ovvero a questo congiunto con un certo numero di giri intorno al taglio. Per esempio, si ha

Fig. 28.



$$0\alpha\beta\mathbf{z} = (0\alpha\beta\mathbf{z} - l) + l\ ;$$

ossia il cammino $0\alpha\beta\mathbf{z}$ equivale al cammino $0\alpha\beta\mathbf{z}0$, che forma un giro positivo intorno al taglio, più il cammino l.

Ora, l'integrazione di $\frac{dz}{z^2+1}$ lungo una linea che circonda il taglio dà per risultato zero. Ed invero, una linea siffatta può ridursi a due circonferenze quali sarebbero le tratteggiate nella figura, oppure, se più piace, a due circonferenze più piccole congiunte insieme mediante i due orli del taglio. La integrazione lungo i due orli dà risultati contrari; resta dunque, in ogni modo, la somma dei risultati che la integrazione dà facendo fare alla z i due giri, entrambi positivi o entrambi negativi, l'uno intorno a i e l'altro intorno a $-i$. Nell'un giro (giusta la formola (3)) risulterà $\pm\pi$, nell'altro $\mp\pi$; quindi in ogni caso una somma nulla.

Tutti i cammini tracciabili in S_1 da 0 a $\mathbf{z}$ condurranno dunque ad uno stesso valore per l'integrale (1); cioè dire quest' integrale potrà in S_1 riguardarsi come funzione monodroma. I valori ch' esso avrà lungo l' orlo negativo del taglio supereranno di π quelli lungo l' orlo positivo; come si ha dalla formola (3) integrando $\frac{dz}{z^2+1}$ a partire da un punto dell'orlo positivo lungo la circonferenza di centro i che conduce al punto corrispondente dell' orlo negativo.

Ricongiungendo i due orli del taglio e conservando inalterato il sistema dei valori deposti in ogni punto, si avrà in esso sistema una funzione discontinua lunga la linea t, perchè, traversando z questa linea, il valore della funzione cambia bruscamente del modulo di periodicità π.

La funzione inversa dell' integrale (1), preso in tutta la sua generalità, è periodica secondo π. Designando con φ l' integrale, si avranno le

$$\mathbf{z}=\operatorname{tang}\varphi \quad , \quad \varphi=\operatorname{arc\,tang}\mathbf{z} \quad ;$$

ma non entreremo in particolari superflui pel nostro scopo.

§. 75. Nel §. 73 abbiamo trovato (formola (3)) che l' integrale di $\frac{dz}{z}$ prende il valore $2\pi i$ per un giro positivo di z intorno al punto 0. Ora, di passaggio, notiamo che, per lo stesso giro, l' integrale di $\frac{dz}{z^{n+1}}$, ove n sia numero intero non nullo, prende invece il valor 0 (*).

Consideriamo, più in generale, l' integrale

$$\int_g \frac{dz}{(z-\gamma)^{n+1}}$$

scaturiente dal far compiere a z un giro positivo intorno a γ. Imaginando che il cammino di z sia una circonferenza di centro γ e di raggio R, e ponendo

$$z-\gamma=Re^{\Omega i}\ , \quad \text{d' onde} \quad dz=Re^{\Omega i}\,id\Omega\ ,$$

si avrà

$$\int_g \frac{dz}{(z-\gamma)^{n+1}}=\frac{i}{R^n}\int e^{-n\Omega i}\,d\Omega=\frac{i}{R^n}\int[\cos n\Omega-i\operatorname{sen} n\Omega]d\Omega\ .$$

(*) Questo integrale e quelli lungo a e b nel § precedente, divisi per $2\pi i$, potrebbero qualificarsi come *residui* (*Notizie*, pag. 105). Nel *Calcolo dei residui* la proprietà, oggetto di questo §, enuncierebbesi dicendo, che, il residuo della funzione $\frac{1}{z^{n+1}}$ relativo a $z=0$ è l' unità o lo zero secondochè l' intero n sia nullo o no.

Ora, mentre Ω percorre tutti i valori da 0 a 2π, ossia percorre i $4n$ (o $-4n$, se n negativo) intervalli

$$0 \ldots \frac{\pi}{2n} \ldots 2\frac{\pi}{2n} \ldots 3\frac{\pi}{2n} \ldots 4\frac{\pi}{2n} \ldots \quad \ldots 4n\frac{\pi}{2n} \quad ,$$

$\cos n\Omega$ percorre i valori compresi tra

$$1 \ldots 0 \ldots -1 \ldots \quad 0 \ \ldots \ 1 \ \ldots \ \ldots \ 1 \quad ,$$

sì che prende in ogni due intervalli consecutivi gli stessi valori con segni (e ordine) contrari; dunque l'integrale di $\cos n\Omega . d\Omega$ riesce nullo. E così pure l'integrale di $\operatorname{sen} n\Omega . d\Omega$. E però

$$\int_g \frac{dz}{(z-\gamma)^{n+1}} = 0 \quad .$$

Sarebbesi tosto riconosciuta questa proprietà anche riflettendo che la funzione $\frac{1}{(z-\gamma)^{n+1}}$ è la derivata della $-\frac{1}{n(z-\gamma)^n}$, e che, essendo entrambe monodrome, continue e finite in una corona circolare di centro γ imaginata a contenere g, l'integrale preso lungo g è (§. 69) la differenza dei valori estremi di $-\frac{1}{n(z-\gamma)^n}$.

SEZIONE QUARTA

ANALISI DEI MODI SECONDO I QUALI LE FUNZIONI POSSANO COMPORTARSI, NEL SUPPOSTO DELLA MONODROMIA, INTORNO AI SINGOLI VALORI DELLA VARIABILE.



Qui finalmente principia lo studio generale delle funzioni. Ciò che si prende a considerare è una funzione w qualsiasi supposta data; per il che non devesi già imaginare una quantità definita per mezzo di equazioni od espressioni analitiche contenenti z, ma puramente, come dicemmo, un sistema w di valori deposti su una porzione del piano z e varianti da punto a punto in guisa da soddisfare la $i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$ (*). In siffatto studio si prendono le mosse dalle proprietà dimostrate nei §§ precedenti circa gli integrali presi lungo linee chiuse.

Siccome si considera la funzione non già in tutta la estensione del piano z, ma soltanto nell'intorno di un punto prescelto ad arbitrio, così, pure nel supposto della monodromia, si preparano in questa *Sezione* elementi per lo studio ulteriore non solo delle funzioni a un valore, ma anche di quelle a

(*) Il dato di uno espressione analitica può sempre imaginarsi tradotto nel dato precedente, supponendo, per ciascun valore di z, in tutta la estensione ove la espressione tiene significato, calcoloto il valor della medesima e deposto nel rispettivo punto del piano z. Uno frazione roziunale in z, siccome significativa in tutta la estensione del piano, potrebbe supporsi tradotta in un sistema di valori coprenti tutto intero il piano; uno serie convergente soltanto in un determinato cerchio supporrebbesi trodutta in un sistemo coprente soltanto questo cerchio.

più valori; essendochè, nell'intorno di ciascun punto-valore di z appartatamente considerato, eccettuati tuttavia punti particolari per ogni singola funzione, le funzioni a più valori potranno riguardarsi, al pari di quelle a un valore, come monodrome. Questa *Sezione* porge, per così dire, l'*anatomia* di parti elementari che entrano sempre necessariamente a costituire il dato complessivo di qualunque funzione; mentre la considerazione delle funzioni in tutta quanta, indivisa, la estensione della loro esistenza, lo studio di classi speciali di funzioni, non che, in particolare, la determinazione delle espressioni analitiche più proprie per le medesime saranno materia delle *Sezioni* successive.

Primamente esamineremo come possano comportarsi le funzioni intorno a un valore *finito* della variabile, e scinderemo questo esame in tre *Capitoli*; supponendo nel *primo* che, pel valore preso di mira, la funzione sia *continua e finita*, nel *secondo* che sia soltanto *continua*, nel *terzo nè anche continua* (*). Lo stesso esame pel valore ∞ della variabile darà poi luogo ad un *quarto Capitolo*. E ad un *quinto* infine darà luogo l'esame del come si comportino, in confronto di una funzione, la derivata e gli integrali di essa.

CAPITOLO PRIMO

Come una funzione si comporti intorno a un valore della variabile pel quale sia monodroma, continua e finita.

§. **76.** Diciamo monodroma una funzione per un determinato punto-valore di z allorchè tale possa dirsi, giusta il §. 44,

(*) O, in altri termini, *continua e finita*, *continua e infinita*, *discontinua*.

in un cerchio (porzione del piano z) avente il centro in quel punto e piccolo quanto si sia ma ancora assegnabile (*).

Sia pertanto S un cerchio, o piuttosto una porzione comunque conformata di piano z, in cui imaginiamo che la funzione w da prendersi in considerazione sia monodroma, continua e finita.

Significando $\varkappa$ un punto qualsivoglia entro S, la funzione

$$\frac{w}{z-\varkappa}$$

è pure monodroma, continua e finita dappertutto in S, tranne nel punto $\varkappa$. Circondiamo questo punto con una linea k, e consideriamo l' integrale

$$\int_k \frac{w\,dz}{z-\varkappa} \;.$$

Il suo valore non cambia deformandosi comunque la linea k entro S, purchè sempre costituente un solo giro positivo intorno a $\varkappa$. Perciò, imaginando che la linea sia una circonferenza col centro in $\varkappa$ e con raggio R decrescente indefinitamente, e ponendo

$$z-\varkappa = R e^{\Omega i} \;, \text{ d' onde } \frac{dz}{z-\varkappa} = i\,d\Omega \quad ,$$

e riflettendo, come già nel §. 74, che w tenderà ad avere costantemente il valore $w(\varkappa)$ durante la integrazione, si ottiene

$$\int_k \frac{w\,dz}{z-\varkappa}\,dz = i\int_k w\;d\Omega = i\,w(\varkappa) \int_k d\Omega = 2\pi i\,w(\varkappa) \quad ,$$

(*) Se non avessimo premessa la definizione della monodromia relativamente ad una estensione superficiale, potremmo qui dire: chiamarsi monodroma in un punto una funzione allorchè, partendo z da questo punto e la funzione da prestabilitovi valor corrispondente, ad una variazione infinitesima di z non possa corrispondere che *una* variazione infinitesima della funzione. Osserviamo però, che non potrebbe dichiararsi monodroma in una superficie S (non semplicemente connessa) una funzione perchè tale limitatamente nei singoli punti della medesima. Ritornando all' esempio $w=z^{\frac{1}{3}}$ del §. 44, è chiaro che, per ogni singolo punto di una corona circolare col centro in 0, la w può dirsi monodroma, mentre non è tale relativamente alla intiera corona.

da cui

$$w(\varkappa) = \frac{1}{2\pi i}\int_k \frac{w\,dz}{z-\varkappa} .$$

Come si è detto, la linea k può essere una qualunque fra le infinite linee rientranti che in S compiono un giro positivo intorno a $\varkappa$. Ora, senza dimenticare cotesta arbitrarietà della linea d' integrazione, potremo indicare come tale il contorno di S, supponendolo formato di una sola linea continua. D' altronde, non avendo fatta alcuna particolare supposizione circa la grandezza e forma di S, potremo anche imaginare che la stessa S vari sì che il suo contorno possa prendere una piuttostochè altra conformazione. Scrivendo pertanto s invece di k, ed inoltre scambiando tra loro le lettere z e $\varkappa$, affinchè z torni a significare un punto qualunque di S, mentre $\varkappa$ passerà a significare un punto destinato a percorrere il contorno d' integrazione, enuncieremo il seguente

Teorema. *Il valore di una funzione w in un punto qualunque z di una porzione S del piano z, nella quale sia monodroma, continua e finita, può esprimersi coll' integrale*

$$(1) \qquad w = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} .$$

Questa formola, la cui dimostrazione può qualificarsi come determinazione del residuo di $\frac{w(\varkappa)}{\varkappa-z}$ pel valore z della variabile $\varkappa$ (pag. 105), è dovuta a Cauchy (*Notizie*, nota ultima della pag. 83). Essa è lo strumento principale per effettuare l' analisi ch' è oggetto di questa *Sezione*.

Nel giungere a questo teorema si è supposto il contorno s formato di una sola linea continua, che potesse riguardarsi come una deformata della linea k. Ma si riconosce subito, come pel teorema del §. 69, che esso sussiste comunque il contorno di S sia formato, di una sola cioè o di più linee separate. Ed invero, abbia, per esempio, la S, come la A della

fig. 22, il contorno composto di tre parti separate. Imaginando operati in essa due tagli in guisa da convertirla in una superficie S', come la A', il cui contorno s' consti di una sola linea continua, avremo

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_{s'} \frac{w(x)dx}{x-z} .$$

Ma, essendo s' composto del contorno s e degli orli positivo e negativo di ciascun taglio, l' integrale preso lungo s' equivarrà alla somma degli integrali presi separatamente lungo s e lungo i detti orli. Ora lungo i due orli di uno stesso taglio l' integrazione dà risultamenti contrari. Nella somma dunque gli integrali presi lungo gli orli si distruggeranno a due a due e non resterà che l' integrale preso lungo s, cioè si avrà l' eguaglianza

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{s'} \frac{w(x)dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{s} \frac{w(x)dx}{x-z} ,$$

che insieme colla precedente dà ancora appunto la (1).

La (1) comincia a mettere in piena evidenza parte della determinazione involta nella equazione alle derivate parziali $i\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y}$: cioè che, se una quantità w ha da essere *funzione di $x+yi$ continua e finita dappertutto in S*, non si possono stabilire arbitrariamente i suoi valori dappertutto in S, bastando che sieno stabiliti sul contorno. Ma nè anche poi sul contorno, come in seguito vedremo, si possono stabilire arbitrariamente cotesti valori, cioè tutti i valori della parte reale e tutti quelli della parte imaginaria della funzione. Ben altramente sappiamo dal §. 22 avvenire di una quantità che debba essere *soltanto* funzione di x e y in S; non dovendo soddisfare a veruna equazione alle derivate, essa rimane quivi ancora immensamente arbitraria, quand' anche si assoggetti ad essere in ogni punto continua e finita e ad avere nel contorno valori dati; e non sarebbe mai insomma a pieno determinata finchè restasse una

qualsia porzione finita di S dove null' altro fosse imposto alla medesima che di essere continua e finita.

Se w avesse nel contorno il valor costante C, avrebbe questo stesso valore dappertutto in S. Infatti ritenendo $w=C$ rimangono soddisfatte tutte le condizioni che determinano w. Del resto, la (1) darebbe subito

$$w=\frac{C}{2\pi i}\int\frac{dx}{x-z}=C\ .$$

§. 77. Il secondo membro della

$$(1)\qquad w=\frac{1}{2\pi i}\int_s\frac{w(x)\,dx}{x-z}\ ,$$

che può considerarsi come una prima espressione analitica della w, somministra una espressione della stessa natura, cioè un integrale, per ognuna delle derivate della w. Infatti, riflettendo che, finchè z esprime un punto veramente nell' interno di S, cioè dire sensibilmente distante dal contorno, la quantità sotto il segno integrale e le sue derivate rispetto a z sono finite, si scorge, giusta il notato alla fine del §. 68, potersi effettuare la derivazione (rispetto a z) dell' integrale sotto il segno d' integrazione. Si avrà dunque

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{dw}{dz}=\frac{1}{2\pi i}\int_s\frac{w(x)\,dx}{(x-z)^2}\ ,\\ &\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{1.2}{2\pi i}\int_s\frac{w(x)\,dx}{(x-z)^3}\ ,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\ &\frac{d^nw}{dz^n}=\frac{1.2..n}{2\pi i}\int_s\frac{w(x)\,dx}{(x-z)^{n+1}}\ ,\\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\qquad . \end{aligned}\right.$$

Ciascuno di questi integrali è funzione monodroma, continua e finita per ogni valore di z entro S. Possiamo quindi enunciare il seguente

Teorema. *Dove una funzione di z sia monodroma, continua e finita, devono pure esserlo tutte le sue derivate.*

Nel §. 25 abbiamo invece osservato che le derivate di una funzione soltanto di x e y possono benissimo avere infiniti e discontinuità in punti e lungo linee dove la funzione sia monodroma, continua e finita.

Tornando a supporre che nell'integrale (1) la linea d'integrazione sia una circonferenza di centro z e di raggio R, ponendo

$$\varkappa - z = Re^{\Omega i}\,, \quad \text{d' onde} \quad d\varkappa = Re^{\Omega i}\, i\, d\Omega\,,$$

e partendo dal valor 0 di Ω, avremo

$$(3) \qquad w = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\varkappa)\,d\Omega\,.$$

Questa espressione di w, scritta come segue

$$u + vi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [u(\varkappa) + v(\varkappa)i]\,d\Omega \quad ,$$

si decompone nelle due analoghe per u e v

$$(4) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\varkappa)\,d\Omega \quad , \quad v = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varkappa)\,d\Omega\,.$$

Possiamo dire che le (3) e (4) significano che i valori di w, u, v nel punto z sono ordinatamente le medie aritmetiche dei valori che le stesse quantita hanno all' ingiro di z. Per mettere questo significato in maggior evidenza imagineremmo divisa la circonferenza in n parti eguali, e porremmo $d\Omega = \frac{2\pi}{n}$; per il che le (3) e (4) diverrebbero

$$w = \lim_{n=\infty} \frac{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}{n}\,,$$

$$u = \lim_{n=\infty} \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n}\,,$$

$$v = \lim_{n=\infty} \frac{v_1 + v_2 + \ldots + v_n}{n}\,,$$

dove $w_1, w_2, \ldots, w_n$ esprimono i valori di w nei punti di divisione. Da qui emerge che per una parte dei punti circostanti al punto z i valori di u saranno più grandi e per la restante parte più piccoli di quello che nel punto z; altrettanto dicasi della v. Sussiste dunque il

Teorema. *Le parti reale e imaginaria di una funzione di z non possono avere nè massimo nè minimo valore in verun punto dove la funzione sia monodroma, continua e finita.*

Introducendo R e Ω invece di $\varkappa$ nelle (2), la espressione che ivi sta scritta per una qualunque derivata di w può presentarsi nel seguente aspetto

$$(5) \qquad \frac{d^n w}{dz^n} = \frac{1.2\ldots n}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} w(z + Re^{\Omega i}) e^{-n\Omega i} d\Omega \; ,$$

come la (3) ossia la

$$w = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z + Re^{\Omega i}) d\Omega$$

per la w.

§. 78. Dalla

$$(1) \qquad w = \frac{1}{2\pi i} \int_s \frac{w(\varkappa)\, d\varkappa}{\varkappa - z} \; ,$$

che, secondo fu detto, può riguardarsi come una prima espressione analitica di w, si otterranno, svolgendo in serie l'integrale, altre espressioni analitiche per w; le quali saranno più o meno semplici ed importanti e valide in spazio di una o d'altra conformazione (in spazio circolare, ellittico, ecc.) a norma delle funzioni secondo le quali si sarà fatto lo sviluppo in serie. Per l'analisi che abbiamo di mira in questa *Sezione* importa e basta considerare i più semplici sviluppi in serie, cioè quelli che procedono secondo le potenze intere di z o di una differenza $z-\gamma$.

Imaginiamo a tal fine, primieramente, un cerchio G che contenga il punto z e sia tutto compreso entro S. Come cam-

mino d'integrazione nella (1) si potrà prendere la circonferenza g di G, cioè si potrà porre

$$(1)' \qquad w = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} \ .$$

Dovendo $\varkappa$ percorrere la circonferenza, se γ ne esprima il centro, sarà sempre

$$\mathrm{mod}\,(\varkappa-\gamma) > \mathrm{mod}\,(z-\gamma) \ ,$$

e quindi la frazione

$$\frac{1}{\varkappa - z} = \frac{1}{(\varkappa-\gamma)-(z-\gamma)}$$

potrà svolgersi nella serie convergente

$$\frac{1}{\varkappa-z} = \frac{1}{\varkappa-\gamma} + \frac{z-\gamma}{(\varkappa-\gamma)^2} + \frac{(z-\gamma)^2}{(\varkappa-\gamma)^3} + \dots \ .$$

Moltiplicando per $w(\varkappa)d\varkappa$, integrando lungo g, e portando fuori dai segni d'integrazione le potenze di $z-\gamma$, invece della (1)' si potrà dunque scrivere lo sviluppo in serie

$$(2) \quad w = \frac{1}{2\pi i}\left[\int_g \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa-\gamma} + (z-\gamma)\int_g \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{(\varkappa-\gamma)^2} + (z-\gamma)^2\int_g \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{(\varkappa-\gamma)^3} + \dots\right]$$

ovvero

$$(2)' \qquad w = C_0 + C_1(z-\gamma) + C_2(z-\gamma)^2 + \dots \ ,$$

dove, per brevità, s'intende

$$(3) \qquad C_n = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{w(\varkappa)\,d\varkappa}{(\varkappa-\gamma)^{n+1}} \ .$$

Questo risultato può enunciarsi nel

Teorema. *I valori di una funzione di z, monodroma, continua e finita entro un cerchio di centro γ, possono esprimersi mediante una medesima serie di potenze intere e positive di $z-\gamma$ per tutti i punti di esso cerchio.*

Considerando una quantità $f(x,y)$ dipendente dalle variabili reali x e y, per poter asserire, giusta questo teorema, che

essa sia sviluppabile in serie secondo le potenze di $x+yi-\gamma$, bisognerebbe sapere che in un cerchio di centro γ soddisfaccia le condizioni di variare conformemente alla $i\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$ e di essere in ogni punto monodroma, continua e finita. Ora riflettiamo che queste condizioni sono non solo sufficienti ma anche necessarie. Infatti una serie qual' è il secondo membro della (2)', soddisfacendo entro il proprio cerchio di convergenza queste condizioni, non potrebbe esprimere una funzione che non le soddisfacesse. Ciò premesso, è chiaro, potersi il precedente teorema tradurre nei termini seguenti

Teorema. *Affinchè una funzione delle variabili x e y sia sviluppabile in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di $x+yi-\gamma=z-\gamma$, convergente in un cerchio di centro γ, è necessario e sufficiente che la funzione sia monogena, monodroma, continua e finita in tale cerchio.*

Questa serie non è altro che la solita di Taylor, ma di cui adesso veggonsi in piena luce le condizioni necessarie e sufficienti per la sua sussistenza. Devesi a Cauchy l' onore di avere pel primo stabilita finalmente sopra i suoi veri principi questa importante questione della sviluppabilità secondo la formola di Taylor. La possibilità o l'impossibilità di svolgere una funzione colla formola di Taylor può essere riconosciuta senza che si debbano calcolare i termini stessi della serie, purchè la funzione da svolgere sia definita per valori sì reali che complessi della variabile. La introduzione della variabilità complessa in siffatta questione è uno dei più grandi progressi che l'analisi debba a Cauchy e che la medesima abbia fatto in questo secolo (*).

Le formole (1) e (2) permettono di dichiarare che, non diversamente dal caso delle funzioni di una variabile reale, le funzioni di una variabile complessa, dovunque siano monodrome, continue e finite, sono analitiche. I risultamenti ottenuti

(*) Sono a un dipresso le parole usate a questo proposito dal sig. Bertrand nella prefazione del suo *Traité de Calc. Differ.* (Pag. XXXII). Vedi anche le *Notizie*, pag. 83.

porgono già conferma più che luminosa della opportunità dell'assunta definizione di funzione d'una variabile complessa.

Per tradurre la (2)' nel solito aspetto, nel quale cioè i coefficienti sono espressi colle derivate della funzione, basta confrontare le formole (2) del §. 77 col precedente valore di C_n, in cui è indifferente di scrivere z invece di x e di supporre s invece di g la linea d'integrazione. Questo confronto mostra che

$$(3)' \qquad C_n = \frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{d^n w}{dz^n}\right)_{z=\gamma} ,$$

e che quindi la (2)' non è altro che

$$(2)'' \qquad w = w(\gamma) + \frac{z-\gamma}{1}\left(\frac{dw}{dz}\right)_\gamma + \frac{(z-\gamma)^2}{1.2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_\gamma + \ldots .$$

Nessun'altro sviluppo in serie ordinata secondo le potenze intere, positive di $z-\gamma$ potrebbe darsi per la funzione w.

Infatti, una serie della forma

$$B_0 + B_1(z-\gamma) + B_2(z-\gamma)^2 + \ldots ,$$

che sia convergente, non può che esserlo entro tutto un cerchio di centro γ; e, se quivi w coincide colla serie per qualche estensione lineare o superficiale, deve coincidere, come nel § successivo si vede distesamente spiegato, almeno per tutta l'estensione di esso cerchio che è compresa nell'*intorno* di γ. Ciò premesso, supponiamo dunque la eguaglianza

$$w = B_0 + B_1(z-\gamma) + B_2(z-\gamma)^2 + \ldots .$$

Moltiplicando per $\dfrac{dz}{(z-\gamma)^{n+1}}$ e integrando lungo una circonferenza (o altra linea ad essa riducibile) di centro γ contenuta nella estensione suddetta, si avrà, avuto riguardo al §. 75,

$$\int \frac{w dz}{(z-\gamma)^{n+1}} = B_n \int \frac{dz}{z-\gamma} = B_n . 2\pi i .$$

Questo risultamento, potendovisi scrivere indifferentemente la lettera x invece della z, confrontato colla formola (3), dice appunto che dev'essere $B_n = C_n$.

§. 79. La serie

$$(1)\ w=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_g\frac{w(x)dx}{x-\gamma}+(z-\gamma)\int_g\frac{w(x)dx}{(x-\gamma)^2}+(z-\gamma)^2\int_g\frac{w(x)dx}{(x-\gamma)^3}+\ldots\right]$$

ovvero

$$(1)'\qquad w=C_0+C_1(z-\gamma)+C_2(z-\gamma)^2+\ldots$$

si è ottenuta senz'altro presupporre del cerchio G se non che fosse tutto compreso entro S. Se ora si imagina che la funzione sia data, ed ancora monodroma, continua e finita, anche oltre i confini di S, o, ciò ch'è lo stesso, se si imagina che S ingrandisca, anche il cerchio G potrà imaginarsi più grande, rimanendo tuttavia invariati i valori dei singoli integrali nella eguaglianza (1), non che il ragionamento fatto per conseguirla. E però si riconosce che essa eguaglianza continuerà a sussistere per tutti i punti di G finchè, nell'ingrandire, questo cerchio non raggiunga alcun punto dove w sia infinita o discontinua. Per brevità, porremo la seguente

Definizione. Il massimo fra i cerchi di centro γ che non comprendono nè infiniti, nè discontinuità di w si dirà *l'intorno del punto* γ in riguardo della funzione w.

Una volta calcolati i valori degli integrali ossia dei coefficienti C_n, la serie (1) rappresenta dunque la funzione per tutto l'*intorno* del punto γ. E, siccome questa calcolazione può supporsi fatta con una circonferenza g ristretta quanto piaccia purchè finita (cioè non infinitesima), così è manifesto che la funzione resterà determinata in tutto l'intorno del punto γ, data che sia anche soltanto in una porzione di quest'intorno piccola quanto si voglia, purchè finita, racchiudente γ, ovvero data che sia semplicemente in una linea chiusa attorno a γ piccola quanto si voglia purchè finita.

Di più, osservando che i coefficienti C_n non sono che i quozienti delle derivate pei prodotti 1, 1.2, ecc., è subito visto che la funzione rimarrà ancora determinata per tutto l'intorno di γ anche se, invece di essere data in una linea chiusa, fosse data in una linea qualunque l tirata da γ. Infatti dai valori della

funzione in l discendono necessariamente quelli delle derivate nella linea stessa. Essendo z e z' due punti tra loro infinitamente vicini in l, si ha primamente

$$\frac{dw}{dz}=\frac{w(z')-w(z)}{z'-z} \quad .$$

Dai valori della derivata prima discendono poi similmente quelli della derivata seconda, e così via quelli d'ogni altra successiva derivata. Determinati i valori delle derivate, e basta pel solo punto γ, i coefficienti nella serie

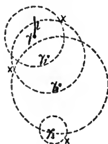
$$(1)'' \qquad w=w(\gamma)+\frac{z-\gamma}{1}\left(\frac{dw}{dz}\right)_\gamma+\frac{(z-\gamma)^2}{1.2}\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_\gamma+\dots$$

restano determinati, e quindi anche w per tutto il cerchio di convergenza della serie, ossia per tutto l'intorno di γ.

Di più ancora, possiamo asserire che

Una funzione w, che sia data in una linea (*) *qualsiasi l, non può essere da l proseguita che in un solo modo sino a qualsivoglia parte del piano, dove si possa giungere passando per liste di larghezza finita per entro le quali w sia dappertutto continua e finita.*

Fig. 29 (**)



Infatti, coi valori in l si potrà determinare w per tutto l'intorno di un punto γ scelto a piacimento in l; ciò fatto, prendendo in quest'intorno un punto γ_1, (Fig. 29), coi valori di w testè determinati si potranno determinare i coefficienti dello sviluppo di w in serie secondo le potenzo intere positive di $z-\gamma_1$, la qual serie rappresenterà la funzione per tutto l'intorno di γ_1; fissando in quest'intorno un punto γ_2, si

(*) Il caso, che w sia data in una estensione superficiale, va compreso, come particolare, nel qui supposto; qualunque linea che corra per entro tale estensione potrà prendersi come linea l.

(**) Nella figura veggonsi rappresentati i quattro *intorni* dei punti $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$; e indicati col segno X i punti che ne limitano la grandezza, siccome punti dove la funzione è discontinua o infinita.

potranno similmente determinare i coefficienti della serie ordinata secondo le potenze di $z-\gamma_2$, e quindi i valori di w per tutto l'intorno di γ_2. E così continuando si fa evidente la verità di ciò che abbiamo asserito.

Dall' esposta proposizione discende che

Se w sia costante in una linea l, dovrà rimanere costante in qualunque parte del piano dove si possa giungere da l per liste di larghezza finita esenti da discontinuità di w.

Imperocchè, soddisfacendo la costante dovunque alle condizioni che devono regolare la funzione e che ne permettono un solo prosegnimento, non può che proseguirsi la identità che tra la costante e la funzione si ammette sussistere originariamente in l.

Nell' enunciazione di questo teorema (che completa l' ultimo del §. 76) non abbiamo escluso anticipatamente il caso che w potesse essere infinita in qualche punto o linea entro le liste per le quali supponesi aver luogo il proseguimento continuo. Egli è perchè questo caso non può verificarsi.

Ed invero ammettiamo, in prima, che w possa essere infinita in un punto ϖ. In questo punto la $\frac{1}{w}$ sarebbe nulla. Circondando il punto con una linea (che da esso disti, ben' inteso, sensibilmente tutt' all' ingiro), sino a questa linea inclusivamente il ragionamento sopra esposto darebbe subito che la w dovrebbe conservare lo stesso valore A suppostole in l, e quindi la funzione $\frac{1}{w}$ il valore $\frac{1}{A}$. Ma, poichè la $\frac{1}{w}$ è continua ed anche finita dappertutto entro la linea, essa dovrebbe quivi avere dappertutto il valore $\frac{1}{A}$; il che contraddice alla supposizione che in ϖ sia $\frac{1}{w}=\frac{1}{\infty}=0$ (*).

(*) Se fosse $A=0$, per evitare la considerazione di una funzione $\frac{1}{w}$ avente il valore $\frac{1}{A}=\infty$, si potrebbe considerare invece della w la $w+B$, essendo B una costante diversa da 0. La $w+B$ sarebbe infinita dove lo fosse w, e quindi, trovando che non può esserlo, resta dimostrato che non può esserlo nè anche w.

Supponiamo, in secondo luogo, che w possa essere infinita lungo linee; di queste linee sia j la prima che s' incontri muovendo da l per quelle liste che si vorranno percorrere. Da ciò che precede discende che, avvicinandosi a j sino a distanze piccole quanto si vogliano purchè finite, la funzione w deve conservare il valore A suppostole in l; e però il passaggio dal valore A al valore ∞ di w in j dovrebbe compiersi in un tratto infinitesimo sul piano z; il che contraddice alla supposta continuità di w. Si potrebbe mettere in evidenza la contraddizione anche considerando la $\frac{1}{w}$. Se questa fosse nulla in j, essendo continua, dovrebbe conservarsi nulla anche venendo da j verso l, mentre muovendo da l verso j deve conservare il valore $\frac{1}{A}$.

Ora possiamo ommettere la presupposizione del valore finito anche nella penultima proposizione, cioè enunciarla semplicemente come segue.

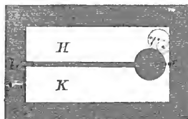
Una funzione, data in una linea qualsiasi, non può essere da questa linea proseguita che in un solo modo per liste di larghezza finita dove la medesima debba essere continua.

Infatti, se per una stessa strada fossero possibili due proseguimenti, indicandoli con w e w_1, la differenza $w-w_1$ avrebbe costantemente il valor 0 nella linea di partenza e non nelle successive regioni del piano, nelle quali dovrebbe tuttavia conservarsi continua.

Se il passaggio da una parte H di piano ad altra parte K non potesse effettuarsi che per una lista la cui larghezza $\partial\varepsilon$

(Fig. 30) in qualche dove divenisse infinitesima, o, in altri termini, se il passaggio non potesse in qualche dove effettuarsi che sopra una linea, l'esposto processo di proseguimento cesserebbe di essere attuabile; una equazione alle derivate parziali (qual' è appunto la $i\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}$) non potrebbe servire a determinare i valori della funzione in K per mezzo di quelli in H.

Fig. 30.



Sebbene non si possa proseguire, come ora vedemmo, che in una sola maniera continua una funzione data su qualche parte del piano z, tuttavia, potendosi giungere a una parte L percorrendo liste differenti (per esempio, nella fig. 30, da γ percorrendo la lista H prolungata finchè occorra, e da γ percorrendo invece la lista K), potrà accadere che in L la funzione giunga a conseguire valori diversi a seconda delle liste che si saranno percorse. Ma a questo proposito non dobbiamo entrare per adesso in ulteriori considerazioni, e solamente facciamo notare che colla fatta riflessione si apprezzeranno in tutto il loro significato i termini impiegati dal sig. Riemann (*) nel porre la distinzione delle funzioni in funzioni *a un valore* e *a più valori*, da noi posta nel §. 44.

Mettiamo da ultimo in rilievo anche queste altre proposizioni.

Una funzione monodroma e continua in una porzione finita S del piano non può avere il valor 0, *o, più in generale, uno stesso valore A in una infinità di punti entro S senza avere lo stesso valore dappertutto in S.*

Questa proposizione rientra in quella nella quale si suppose

(*) *Allgemeine Voraussetzungen und Hülfsmittel ecc.*, giorn. di Crelle-Borchardt, tomo 54, pag. 102. « Secondo la natura della funzione da proseguire, essa o riprenderà per uno stesso valore di z sempre lo stesso valore per qualunque via il proseguimento vogliasi attuare, o no. Nel primo caso chiamo la funzione *a un valore*, . . . ».

w costante in una linea l; poichè i punti dotati per w del valore A non potrebbero essere in numero infinito entro S senza succedersi in qualche dove a intervalli infinitesimi, cioè senza costituire un luogo superficiale o lineare entro S. È chiaro che S vien sottintesa tale che qualunque sua parte sia connessa alla restante per liste di larghezza finita.

Una funzione non può avere tutte le derivate nulle in un punto, dove sia monodroma, continua e finita, senza essere costante per tutto l' intorno di esso punto.

Infatti, se le derivate fossero tutte nulle nel punto γ, la serie (1)'' ridurrebbesi al solo primo termine, cioè darebbe $w=w(\gamma)$ per tutto l' intorno di γ.

Nella investigazione delle proprietà e per la trattazione di tutte, in generale, le questioni concernenti una funzione, è della massima importanza di saper anzitutto stabilire per la sua completa determinazione un sistema di dati o condizioni non solo sufficienti ma anche strettamente necessarie ossia indipendenti tra loro. I teoremi precedenti riducono bensì i dati, da supporsi per la determinazione di una funzione, ad una estensione molto minore di quella che potrebbe dirsi tacitamente abbracciata allorquando, per dimostrare, per esempio, la equivalenza di due espressioni in z, si trasformassero l' una nell' altra, cioè si dimostrasse la loro coincidenza per tutta quanta la estensione nella quale entrambe le espressioni tengono significati; ma essi non soddisfanno tuttavia alla richiesta di ridurre i dati ai soli necessari. Supponendo dati i valori di w per tutti i punti di una linea, siccome a determinare w basterebbero già (insieme coll' altre condizioni) i suoi valori in una porzione di questa linea, così tutti i valori nella restante porzione sarebbero dati affatto superflui e che potrebbero ripugnare coi valori concepiti nella prima porzione. Vedremo più tardi come venga soddisfatta sì fondamentale richiesta per le classi di funzioni che più c' importano.

§. **80**. Imaginiamo che nel punto α la funzione w, essendo monodroma e continua, sia nulla. La serie (1)' del § prece-

dente, applicata al caso $\gamma=\alpha$, dà

$$w=C_1(z-\alpha)+C_2(z-\alpha)^2+C_3(z-\alpha)^3+\dots$$

ovvero

$$w=(z-\alpha)\,W,$$

ove s' intenda

$$W=C_1+C_2(z-\alpha)+C_3(z-\alpha)^2+\dots\,.$$

La funzione W, siccome espressa al pari della w da una serie ordinata secondo le potenze intere positive di $z-\alpha$ e convergente per tutto l' intorno di α, si comporta in quest' intorno come la w, cioè si comporta da funzione monodroma, continua e finita. Invece del valor 0 essa ha in α il valore C_1. In riguardo di qualsiasi punto diverso da α, basta riflettere che W è il quoziente di w per la funzione $z-\alpha$ monodroma e continua dappertutto e nulla soltanto in α, per poter conchiudere che W è monodroma, continua e finita dovunque lo sia w e nulla negli stessi punti che w.

Se, insieme colla w, fossero nulle in α le sue derivate prima, seconda, ..., $(\mu-1)$esima, si avrebbe

$$w=C_\mu(z-\alpha)^\mu+C_{\mu+1}(z-\alpha)^{\mu+1}+C_{\mu+2}(z-\alpha)^{\mu+2}+\dots$$

ovvero

(1) $\quad w=(z-\alpha)^\mu\,W,$

ove intendasi

$$W=C_\mu+C_{\mu+1}(z-\alpha)+C_{\mu+2}(z-\alpha)^2+\dots\,.$$

Laonde in ogni caso vediamo che

Una funzione che sia nulla in un punto α, intorno al quale sia monodroma e continua, equivale al prodotto di una potenza intera positiva di $z-\alpha$ per una funzione monodroma e continua insieme con essa, infinita negli stessi punti, nulla negli stessi punti tranne in α.

Considerando i punti attorno ad α, pel fattore $(z-\alpha)^\mu$ contenuto in w, si fa chiaro che in essi i valori di w saranno tanto meno diversi da 0 quanto più grande sarà il numero μ. Questo numero si prende come elemento per distinguere gli zeri

delle funzioni in ordini; chiamandosi *dell'ordine* μ *esimo* lo zero di una funzione monodroma e continua nel punto α allorchè il quoziente di essa per $(z-\alpha)^\mu$ riesca in α nè nullo, nè infinito.

Ciò che specialmente fa importante questa distinzione in ordini si è che uno zero μ uplo (cioè dell'ordine μ esimo) potrà riguardarsi come un sistema di μ zeri *semplici* (cioè dell'ordine primo) venuti a coincidere in uno stesso punto del piano, ossia come μ zeri semplici infinitamente vicini.

Per rendere tal cosa manifesta (*) imaginiamo che w sia in S monodroma, continua e finita e dotata di μ zeri semplici distribuiti nei punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$. Ponendo

$$w = (z-\alpha_1)\, W_1 \quad ,$$

la W_1 sarà monodroma, continua e finita come w, e nulla nei punti $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_\mu$, in S. Ponendo

$$W_1 = (z-\alpha_2)\, W_2 \quad ,$$

la W_2 sarà monodroma, continua e finita come w e W_1, e nulla nei punti $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_\mu$, in S. E, così di seguito, ponendo finalmente

$$W_{\mu-1} = (z-\alpha_\mu)\, W_\mu \quad ,$$

la W_μ sarà monodroma, continua e finita e priva di zeri, in S. Moltiplicando le precedenti eguaglianze si avrà

$$w = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\ldots(z-\alpha_\mu)\, W_\mu \quad ;$$

e imaginando che i punti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu$, avvicinandosi viepiù tra loro, finiscano per confondersi in un' unico punto α, la precedente eguaglianza finirà per convertirsi nella

$$w = (z-\alpha)^\mu\, W_\mu \quad ,$$

affatto simile alla (1).

(*) Veramente potremmo anche dispensarci da questa spiegazione, considerandosi già affatto analogamente, nella teorica delle equazioni algebriche, una radice μ upla come equivalente a μ radici semplici. Senza di ciò non potrebbero enunciarsi i teoremi: ogni equazione ha tante radici quant'è il grado; il coefficiente del secondo termine eguaglia la somma delle radici con segno contrario; ecc. Come in questa teorica, così in quella delle funzioni in generale, con siffatti modi di considerare si consegue maggiore generalità e semplicità.

Per la stabilita definizione dell'*ordine*, una funzione, dove sia monodroma e continua, non può dunque avere che zeri di ordine *intero*; e cioè dell' ordine 1, se con essa non sia nulla la derivata prima; dell'ordine 2, se sia nulla la derivata prima ma non la seconda; ecc.

Ma ciò che giova segnatamente notare si è che quest'ordine non potrebb'essere infinito a meno che la funzione fosse nulla per tutto l' intorno di α. Imperocchè l'ordine non potrebb'essere infinito se qualcuna delle derivate di w avesse in α valor diverso da zero; e, se tutte le derivate avessero in α il valor zero, tutti i coefficienti della serie, come già avvertimmo, sarebbero nulli, e quindi, dovunque la serie è valida, cioè per tutto l' intorno di α, dovrebb'essere $w=0$.

Volendo in seguito significare abbreviatamente *zero dell'ordine μ esimo* useremo del segno 0^{μ}. Però 0 continuerà a significare zero senza distinzione di ordine, mentre uno zero del primo ordine sarà designato con 0^1 (*).

CAPITOLO SECONDO

Come una funzione si comporti intorno a un valore della variabile pel quale sia monodroma, continua e infinita.

§. **81.** Avendo già visto che, dove una funzione sia monodroma e continua, ivi non può essere infinita per una esten-

(*) Come i valori 0, così anche i valori A (essendo A numero complesso qualsiasi) di una funzione w possono distinguersi in ordini. Il valor 0 di w in α si dice dell'ordine μ esimo se, tendendo z ad α, la w tenda al valor 0 in ragione finita con $(z-\alpha)^{\mu}$. Similmente, il valor A di w in γ si potrà dire dell'ordine μ esimo se, tendendo z a γ, la w tenda al valor A in ragione finita con $(z-\gamma)^{\mu}$. In questo caso, analogamente alla $w-0=(z-\alpha)^{\mu}W$, si potrà porre $w-A=(z-\gamma)^{\mu}W$, significando W una funzione nè nulla, nè infinita in γ. Le $\mu-1$ prime derivate di w sarebbero nulle in γ. La formola $w-A=(z-\gamma)^{\mu}W$ potrebbe pure riguardarsi come provenuta dalla $w-A=(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)\ldots(z-\gamma_{\mu})W$; cioè dire un valore A μuplo come un sistema di μ valori A semplici infinitamente vicini.

sione comunque piccola superficiale o lineare senza essere infinita dappertutto, considereremo puramente il caso in cui gli infiniti trovinsi in punti separati.

Sia β uno di questi punti. Per scoprire come si comporti w intorno al punto β, osserviamo in prima la $\frac{1}{w}$. Essendo questa, non solo continua come w, ma anche finita e precisamente nulla in β, si potrà porre, giusta il § precedente,

$$\frac{1}{w}=(z-\beta)^{\nu}\frac{1}{W}\ ,$$

essendo ν numero intero positivo, e $\frac{1}{W}$ una funzione monodroma e continua insieme con la $\frac{1}{w}$, infinita dove lo è $\frac{1}{w}$, e nulla dove lo è $\frac{1}{w}$, tranne in β. Quindi si avrà

$$(1)\qquad w=(z-\beta)^{-\nu}\,W\ ,$$

cioè

Una funzione infinita in un punto β, intorno al quale sia monodroma e continua, può riguardarsi come una frazione, il cui denominatore è una potenza intera positiva di $z-\beta$, e il numeratore è una funzione monodroma e continua insieme con essa, nulla negli stessi punti, infinita negli stessi punti tranne in β (*).

Questa funzione numeratore può esprimersi mediante una serie della forma

$$W=C^{(0)}+C^{(1)}(z-\beta)+C^{(2)}(z-\beta)^2+\ldots$$

convergente per tutto l'intorno del punto β (**). Con questa

(*) Si vorrà bene avvertire la perfetta analogia tra le proposizioni che qui si vanno esponendo circa gli zeri e gli infiniti delle funzioni monodrome e quelle notissime relative alle funzioni algebriche razionali.

(**) Quest'*intorno* potrà dirsi relativo tanto a W che a w. Poichè, quando w abbia in un punto un'infinito, come nel presente caso, o una discontinuità, chiamiamo ancora *intorno* di esso punto il massimo fra i cerchi che avendo ivi il centro non racchiudono altri infiniti od altre discontinuità di w.

serie la (1) somministra la

$$(2)\ w = \frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^{\nu}} + \frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta} + C^{(\nu)} + C^{(\nu+1)}(z-\beta) + \ldots$$

Da qui possiamo riguardare la w come composta delle due parti

$$(3)\qquad \frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^{\nu}} + \frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta}$$

e

$$C^{(\nu)} + C^{(\nu+1)}(z-\beta) + \ldots\ldots$$

Il valore della prima parte, non che separatamente il valore di ogni suo termine, diventa infinito in β, mentre la seconda parte rimane finita. È dunque la prima parte quella a cui è dovuta la comparsa dell'∞ come valore della funzione w in β; di essa parte si può dire che esprime il come la w divenga infinita nell'accostarsi di z a β; od eziandio che *diviene in* β *infinita come la* w. Ed in questo senso si può asserire che

Una funzione non può diventare infinita in un punto, intorno a cui sia monodroma e continua, altrimenti che come una frazione razionale.

§. 82. Di questa frazione razionale, cioè della su esposta parte (3) di w, importa ed è subito ottenuta una espressione composta immediatamente coi valori di w lungo una linea che racchiude il punto β, ma nessun'altro punto dove w sia discontinua o infinita; linea che, per fissar le idee, riterremo a dirittura essere una circonferenza col centro in β. Sia B il cerchio determinato da questa circonferenza e $\mathbf{B}$ l'*intorno* di β. La $\mathbf{B}-B$ sarà una corona circolare entro cui la w non avrà nè infiniti, nè discontinuità. Entro $\mathbf{B}-B$ la w si potrà dunque esprimere, giusta il teorema fondamentale del §. 76, mediante l' integrale

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x-z}$$

da prendersi lungo il contorno della corona in direzione positiva: cioè lungo la circonferenza $\mathbf{b}$ nel senso positivo e lungo la b nel senso negativo degli angoli. Indicando queste due in-

tegrazioni separatamente, avremo

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{b}}\frac{w(x)\,dx}{x-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{b}\frac{w(x)\,dx}{x-z}\;.$$

Questa eguaglianza presenta la w decomposta in due parti, come già la (2) del § precedente. Per riconoscere la diversa natura di queste parti basta far tendere z a β. Perciò bisogna imaginare che vada sempre più stringendosi intorno a β la linea b, che limita l'avvicinamento possibile di z (come punto di $\mathbf{B}-B$) a β. Lo stringersi di b non altera l'eguaglianza precedente; poichè b non sorpassa veruna singularità di w. Stringendosi dunque b, e z tendendo a β, la funzione $w(x)$ ed ancora più il rapporto $\frac{w(x)}{x-z}$ tendono ad avere costantemente il valore ∞ lungo b. Lungo $\mathbf{b}$ invece questo rapporto resta sempre finito. L' integrale lungo b rappresenta dunque una parte di w che diviene infinita, mentre l' integrale lungo $\mathbf{b}$ rappresenta una parte che resta finita in β. Che poi l'integrale lungo b sia precisamente la parte di w espressa dalla (3) del § precedente, e non questa parte colla giunta di una quantità che resti finita in β, lo si riconosce riflettendo che in esso integrale è $\mathrm{mod}(x-\beta)<\mathrm{mod}(z-\beta)$ e che quindi, in luogo di

$$-\frac{1}{x-z}=\frac{1}{(z-\beta)-(x-\beta)}\;,$$

si può mettere lo sviluppo

$$-\frac{1}{x-z}=\frac{1}{z-\beta}+\frac{x-\beta}{(z-\beta)^2}+\frac{(x-\beta)^2}{(z-\beta)^3}+\ldots\,,$$

il quale non contiene alcun termine che resti finito in β. Si ha dunque

$$(1)\qquad \frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^{\nu}}+\frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta}=-\frac{1}{2\pi i}\int_b\frac{w(x)dx}{x-z}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_b\frac{w(x)dx}{z-x}\,.$$

Ciascuno dei coefficienti C può esprimersi isolatamente per mezzo di un'integrale. Basta introdurre nella eguaglianza qui ottenuta il precedente sviluppo invece di $\frac{1}{x-z}$ sotto il segno integrale, per dedurne subito

$$(2) \qquad C^{(\nu-n)} = \frac{1}{2\pi i}\int_b w(x)(x-\beta)^{n-1}dx \qquad (^*).$$

§. 83. Ritornando alla

$$w = (z-\beta)^{-\nu}\,W$$

e considerando i punti attorno a β, è chiaro che in essi i valori di w saranno tanto più grandi quanto più grande sarà ν. Come gli zeri, così anche gli infiniti delle funzioni si sono distinti in ordini, dicendosi *dell' ordine ν esimo* l' infinito di una funzione monodroma e continua nel punto β allorchè il prodotto di essa per $(z-\beta)^\nu$ riesca in β nè infinito, nè nullo. Un infinito ν uplo (cioè dell'ordine ν esimo) può riguardarsi come un sistema di ν infiniti *semplici* venuti a coincidere in uno stesso punto (**).

(*) È chiaro che per tutti i valori (interi) di n maggiori di $\nu-1$ quest'integrale è nullo; poichè la funzione $w(z)(z-\beta)^{n-1}$ riesce finita, oltrechè monodroma e continua, entro b.

(**) Analogamente al già osservato per gli zeri, la formola

$$w = \frac{1}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\ldots(z-\beta_\nu)}\,W \quad ,$$

per $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_\nu = \beta$, traducesi nella

$$w = \frac{1}{(z-\beta)^\nu}\,W \quad .$$

Anche la espressione

$$\frac{C_1}{z-\beta_1} + \frac{C_2}{z-\beta_2} + \ldots + \frac{C_\nu}{z-\beta_\nu} \quad ,$$

opportunamente preparata, si tradurrà nella

$$\frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^\nu} + \frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta} \quad .$$

Tuttavia non sembrerà nè anche qui fuor di luogo la seguente riflessione generale. Essere uno dei pregi ragguardevoli della integrazione curvilinea di somministrare spesso for-

Dove la w ha un' infinito dell' ordine νesimo la $\frac{1}{w}$ ha uno zero dell'ordine νesimo. Avendo notato nel §. 80 che l'ordine dello zero di una funzione in un punto non potrebb'essere infinitamente grande a meno che la funzione avesse il valor zero per tutto l' intorno di esso punto; se si applica questa verità alla funzione $\frac{1}{w}$, si fa manifesto che l'ordine dell'infinito di w in un punto non potrebb'essere infinitamente grande a meno che w avesse valor infinito per tutto l' intorno di esso punto.

Per significare abbreviatamente *infinito dell' ordine νesimo* useremo del segno ∞^ν.

§. 84. Qualunque sia il valore che w possa avere in un punto γ, se quivi sia monodroma e continua, si può sempre porre

(1) $$w=(z-\gamma)^q W,$$

essendo q un numero intero, e W una funzione monodroma e continua insieme con w e nulla ed infinita negli stessi punti tranne in γ. L' esponente q sarà positivo, nullo, o negativo, secondochè il valore di w in γ sarà zero, diverso da zero ma finito, o infinito.

Per quest' esponente daremo ora una formola assai importante che ne determina il valore mediante i valori di w lungo una linea racchiudente γ ma nessun altro punto dove w possa essere nulla o infinita (o discontinua).

mole valevoli senza mutamento per tutti i casi possibili; mentre dovrebbero mutarsi più o meno le formole d' altra sorta che allo stesso scopo si potrebbero comporre. Nello scopo presente, di esprimere cioè la parte di w che diviene infinita, se la espressione si cerchi in forma di frazione razionale compare o la prima, o la seconda delle due precedenti, od altre ancora, secondochè le quantità $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ siano o tutte diverse, o tutte eguali tra loro, od alcune diverse ed altre eguali. La integrazione curvilinea dà invece senz' artifizio la stessa forma in ogni caso, cioè l' integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{w(x)\,dx}{z-x}$$

preso lungo linea che abbracci tutti i punti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$.

Sia g una linea sì fatta, che sarà o potrà supporsi ridotta ad una circonferenza. Facciamola percorrere dalla z, cioè facciamo fare alla z un giro positivo attorno a γ, ed osserviamo come si modifichino per effetto di questo movimento gli argomenti di $z-\gamma$, W e w. Scegliendo inizialmente ad arbitrio uno fra tutti i possibili argomenti tanto per $z-\gamma$ che per W, e determinando quello di w mediante la relazione

$$\arg w = q \arg (z-\gamma) + \arg W ,$$

discendente dalla (1), i valori che in ogni successivo istante questi tre argomenti prenderanno per effetto di loro variazione simultanea e continua soddisferanno pur sempre a questa relazione. Ora, allorchè infine z giungerà al termine del giro attorno a γ, l'argomento di $z-\gamma$, (poichè $z-\gamma$ è rappresentata dal raggio mobile della circonferenza g) si troverà cresciuto di 2π; mentre l'argomento di W (non avendo W nè zeri, nè infiniti entro g) potrà aver ottenuto valori ora più grandi ed ora più piccoli, ma si troverà infine ridotto allo stesso valore iniziale. Dunque l'argomento di w si troverà, giusta la precedente relazione, cresciuto di $2\pi q$. Se adesso riflettiamo che l'argomento di w è il coefficiente di i in lw, e che la parte reale di lw potrà variare durante il giro di z, ma riprenderà infine il valore avuto inizialmente, poichè w, e quindi anche il suo modulo, ha un solo valore per ciascun punto; riconosceremo che la somma delle variazioni di $\arg w$ moltiplicata per i, cioè la quantità $2\pi q i$, non è altro che la somma delle variazioni di lw ossia l'integrale

$$\int d\,lw$$

preso lungo la linea g. Avremo pertanto

$$2\pi q i = \int_g d\,lw$$

d'onde

(2) $$q = \frac{1}{2\pi i}\int_g d\,lw = \frac{1}{2\pi i}\int_g \frac{dw}{w} .$$

§. 85. Consideriamo adesso una porzione S di piano contenente, non un solo, ma un numero qualunque k di infiniti della funzione w. Sieno $\beta_1 \ldots, \beta_k$ i *posti* di questi infiniti (cioè dire i punti del piano sui quali s'imaginano giacere), e $\nu_1, \ldots, \nu_k$ gli ordini rispettivi. Circondando questi posti separatamente con altrettante linee $b_1, \ldots, b_k$ e considerando le linee come tagli operati in S, pei quali ne risultino staccati i pezzi $B_1, \ldots, B_k$, si avrà la porzione $S-B_1-\ldots-B_k$ di piano entro cui w sarà dappertutto monodroma, continua e finita; e però, giusta il noto teorema fondamentale, si potrà porre

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-b_1-\ldots-b_k} \frac{w(x)dx}{x-z}$$

ossia

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s} \frac{w(x)dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b_1} \frac{w(x)dx}{x-z} - \ldots - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b_k} \frac{w(x)dx}{x-z} .$$

Il secondo membro di questa eguaglianza può considerarsi come una prima espressione analitica di w valevole per tutta S. L'integrale preso lungo s esprime una parte di w che rimane finita dappertutto entro S; l'integrale lungo b (intendendo con b una qualunque delle $b_1, \ldots, b_k$) esprime, come s'è visto nel §. 82, una parte che diviene infinita in β.

Supposto che S sia un cerchio, questa prima espressione può subito tradursi in una seconda, pure valevole per tutta S, composta di una serie e di k frazioni razionali. Infatti l'integrale lungo b (e questo qualunque sia S) traducesi, giusta la (1) del §. 82, in una frazione della forma

$$\frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^{\nu}} + \frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta} ;$$

e l'integrale lungo s, se sia γ il centro del cerchio S, potrà svolgersi in una serie della forma

$$C_0 + C_1(z-\gamma) + C_2(z-\gamma)^2 + \ldots ,$$

introducendo, come nel §. 78, la serie

$$\frac{1}{x-\gamma}+\frac{z-\gamma}{(x-\gamma)^2}+\frac{(z-\gamma)^2}{(x-\gamma)^3}+\ldots$$

in luogo di $\frac{1}{x-z}$ nell'integrale stesso. Cotesta seconda espressione di w può qualificarsi come l'analoga di quella colla quale una funzione algebrica razionale presentasi decomposta nella propria parte intera e nelle più semplici parti frazionarie.

Si può subito ottenere anche l'espressione analoga di quella colla quale una funzione razionale presentasi come quoziente di due prodotti di fattori lineari. Basta applicare la decomposizione $w=(z-\alpha)^{\mu} W$ per ciascun zero e la $w=(z-\beta)^{-\nu} W$ per ciascun infinito di w in S. Per l'infinito che è in β_1 potremo porre

$$w=\frac{W_1}{(z-\beta_1)^{\nu_1}},$$

essendo W_1 nè infinita, nè nulla in β_1, ma altrove infinita o nulla dello stesso ordine che w. Per l'infinito che è in β_2, porremo

$$W_1=\frac{W_2}{(z-\beta_2)^{\nu_2}},$$

e, così via,

$$W_{k-1}=\frac{W_k}{(z-\beta_k)^{\nu_k}},$$

essendo W_k priva affatto di infiniti entro S. Quindi

$$w=\frac{W_k}{(z-\beta_1)^{\nu_1}(z-\beta_2)^{\nu_2}\ldots(z-\beta_k)^{\nu_k}}.$$

Siano ora $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ i posti degli zeri di w, e però anche di W_k, in S, e $\mu_1, \ldots, \mu_h$ gli ordini rispettivi. Avuto riguardo ad α_1, potremo porre

$$W_k=(z-\alpha_1)^{\mu_1} W_{k,1},$$

avuto riguardo ad α_2

$$W_{k,1}=(z-\alpha_2)^{\mu_2} W_{k,2}$$

ecc.; laonde

$$W_k=(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_h)^{\mu_h}W_{k,h}$$

e

$$w=\frac{(z-\alpha_1)^{\mu_1}(z-\alpha_2)^{\mu_2}\ldots(z-\alpha_h)^{\mu_h}}{(z-\beta_1)^{\nu_1}(z-\beta_2)^{\nu_2}\ldots(z-\beta_k)^{\nu_k}}W_{k,h} \quad ,$$

$W_{k,h}$ esprimendo una funzione priva di zeri e di infiniti in S.

Da tutto l'esposto emerge che, in una porzione di piano dove sia monodroma e continua, qualunque funzione si comporta analogamente ad una funzione razionale.

§. 86. La somma dei numeri q (§. 84) relativi a tutti i punti di S può esprimersi, come nel §. 84, mediante l'integrale di dlw preso lungo il contorno di S. Ed invero, il differenziale

$$dlw=\frac{dw}{w}=\frac{1}{w}\frac{dw}{dz}dz$$

può dichiararsi finito dappertutto in S tranne nei posti degli 0 e degli ∞ di w. Indicando tuttora con

$$\alpha_1,\ldots,\alpha_h;\beta_1,\ldots,\beta_k$$

questi posti, e circondandoli separatamente con altrettante linee

$$a_1,\ldots,a_h;b_1,\ldots,b_k\ ,$$

e, ricordando dal §. 72 che l'integrale preso lungo il contorno di S equivale alla somma degli integrali presi lungo le linee che circondano le singularità del differenziale (che adesso è dlw), avremo

$$\int_s dlw=\int_{a_1} dlw+\ldots+\int_{a_h} dlw+\int_{b_1} dlw+\ldots+\int_{b_k} dlw,$$

da cui, per la (2) del §. 84, la formola annunziata

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_s dlw=\mu_1+\ldots+\mu_h-\nu_1-\ldots-\nu_k\,.$$

Ricordando che uno zero od un infinito μuplo può riguar-

darsi come un sistema di μ zeri od infiniti semplici, la somma $\Sigma\mu$ può dirsi il numero degli zeri (semplici) e la $\Sigma\nu$ il numero degli infiniti di w in S; perciò il teorema contenuto nella eguaglianza precedente può enunciarsi come segue:

Il numero degli zeri diminuito del numero degli infiniti di una funzione w, in una porzione S di piano dove sia monodroma e continua, eguaglia la quantità di cui varia lw, divisa per $2\pi i$, nel mentre z percorre positivamente il contorno di S.

La quantità di cui varia lw lungo s equivale, come abbiamo già detto, al prodotto di i per quella di cui varia l'argomento di w. Dunque, indicando rispettivamente con $(\arg w)_0$ e $(\arg w)_s$ il valore scelto per $\arg w$ al principio del cammino di z e il valore che per variazione continua ne risulta alla fine, potremo anche scrivere

$$(1)' \qquad \frac{1}{2\pi}\left[(\arg w)_s - (\arg w)_0\right] = \Sigma\mu - \Sigma\nu$$

ed enunciare il teorema come segue:

Il numero degli 0^1 diminuito del numero degli ∞^1 di w in S eguoglia la quantità di cui varia l'argomento di w, divisa per 2π, facendo percorrere a z positivamente il contorno di S (*).

CAPITOLO TERZO

Come una funzione si comporti intorno a un valor della variabile pel quale, isolatamente, sia discontinua.

§. 87. Per esaminare il caso di una funzione che soffra discontinuità in un punto ∂, mentre attorno al medesimo sia

(*) Questo insigne teorema dovuto a Cauchy presta grande servigio nella separazione delle radici delle equazioni. Come si è mostrato nelle *Notizie* (pagg. 107-111) specialmente se trattisi di equazione ($w=u+vi=0$) algebrica, il teorema è anche messo sotto forma un po' diversa, involgente la nozione di *indice* relativamente al rapporto $\frac{v}{u}$.

monodroma e continua, imagineremo una corona circolare, come già nel §. 82, col centro in δ, entro cui la funzione sia dappertutto monodroma, continua e finita, e quindi esprimibile mediante il solito integrale

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{w(x)dx}{x-z}$$

preso lungo l' intero contorno della corona, ossia esprimibile mediante la differenza

$$(1) \qquad w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}}\frac{w(x)dx}{x-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{d}\frac{w(x)dx}{x-z}\ ,$$

dove $\mathbf{d}$ e d significano le circonferenze maggiore e minore costituenti il contorno della corona, e da percorrersi entrambe nel senso positivo degli angoli.

Ma adesso si presenta una distinzione importante fra due modi entrambi possibili di essere della discontinuità. Affinchè la espressione trovata per w nella corona possa servire a riconoscere come w si comporti quando z s'approssimi al centro della corona, bisogna, come nel già citato §. 82 ne avemmo esempio, che la espressione continui senza mutamento a valere anche se, restando fissa la maggiore delle due circonferenze, la minore si vada stringendo sempre più; affinchè z possa sempre più accostarsi al centro senza dover uscire dalla corona. Or bene, non possiamo ammettere questa immutabile validità se non quando la circonferenza d nello stringersi non debba mai sorpassare infiniti o discontinuità di w. In quanto alle discontinuità, avendo supposto quella in δ separata (cioè a distanza finita) dalle altre, potremo sempre imaginare la corona già bastantemente piccola perchè non solo in essa, ma nè anche nel cerchio D (di circonferenza d), non sianvi altre discontinuità, ed allora la d potrà restringersi indefinitamente senza mai sorpassarne. Ma, quanto agli infiniti, non volendo escludere a loro riguardo verun caso, dobbiamo contemplare e il caso in cui la discontinuità ne sia separata e il caso contrario. Nel primo,

prendendo la corona bastantemente piccola, si che nè anche il cerchio D contenga infiniti di w, la espressione trovata per w nella corona si manterrà valida comunque restringasi la d. Ma altrettanto non si può fare nell' altro caso, che perciò vuolsi distinguere dal primo, ed esige speciale considerazione.

Per intanto cominciamo a riflettere come possano trovarsi distribuiti in questo secondo caso gli infiniti. Lasciamo in disparte, come superflua per questo scopo, una delle due circonferenze, considerando semplicemente un cerchio D. È chiaro che, comunque piccolo si voglia supporre questo cerchio purchè finito, gli ∞ di w fuori di D si troveranno a distanze finite tra loro; altrimenti w avrebbe valore ∞ in qualche estensione lineare o superficiale dove è continua, e però avrebbe valor ∞ dovunque, partendo da quivi, si potesse andare per liste di larghezza finita esenti da discontinuità. Per lo contrario, entro D le distanze tra gli ∞ non dovranno essere sempre finite; altrimenti si potrebbe far impiccolire D di tanto che, pure essendo ancora finito, lasciasse fuori di sè tutti gli ∞, eccetto quello che fosse per trovarsi nel centro δ; ed allora la singularità in δ si troverebbe, contro il supposto, separata da ogni altra. Si fa quindi manifesto che, se non siano separabili dalla discontinuità, gli infiniti si succederanno a intervalli che diverranno infinitamente piccoli col diventare infinitamente piccola la loro distanza dalla discontinuità.

Entro D o, più in generale, entro una porzione S del piano, la quale comprenda uno o più punti di discontinuità, esisterà un numero finito o no di ∞, secondo che questi saranno o no separati dalle discontinuità.

Concependo intorno ad una discontinuità non separata dagli ∞ una corona circolare finita $\mathbf{D}-D$ non contenente verun ∞, allorchè si vorrà imaginare che la circonferenza d si ristringa, siccome di quando in quando dovrà sorpassare degli ∞, se questi si vorranno escludere dalla corona, bisognerà imaginare che allora si ristringa anche la circonferenza $\mathbf{d}$, e si dovranno quindi mutare ad un tempo e l' integrale lungo d e

quello lungo **d** nella espressione (1) della funzione. La corona non potrebbe più avere che una larghezza infinitesima, se si volesse con essa stringere infinitamente da vicino il punto δ.

Esempi. Presentano in δ una discontinuità separata dagli infiniti le funzioni

$$e^{\frac{1}{z-\delta}}\ ,\quad \mathrm{sen}\,\frac{1}{z-\delta}\ ,\quad \cos\frac{1}{z-\delta}\ ,\quad \mathfrak{S}\left(\frac{1}{z-\delta}\right)\ ,$$

le quali, di infiniti, non ne hanno nemmeno uno, essendo continue e finite per ogni valor di z diverso da δ. Esse però, eccettuatane la prima, posseggono una infinità di zeri succedentisi ad intervalli che divengono infinitesimi insieme colla distanza loro da δ. Così, per esempio, la funzione $\cos\frac{1}{z-\delta}$ è nulla (del primo ordine) per tutti i valori di $\frac{1}{z-\delta}$ che sono multipli dispari di $\frac{\pi}{2}$; cioè dire è nulla in tutti i punti del piano z dati dalla formola

$$\frac{1}{z-\delta}=(2m+1)\frac{\pi}{2}\ ,\qquad \text{ossia}\quad z=\delta+\frac{2}{(2m+1)\pi}\ ,$$

la qual formola somministra evidentemente punti tanto più prossimi l'uno all'altro e a δ quanto più grandi sono i valori che vi si pongono per m. Prendendo una di siffatte funzioni come denominatore (si che i suoi zeri diano luogo ad altrettanti infiniti), si formeranno quozienti che offriranno in δ una discontinuità non separata dagli infiniti. Tale è il quoziente $\mathrm{tang}\,\frac{1}{z-\delta}$ (*).

(*) Le addotte trascendenti porgono gli esempi i più ovvi possibili di discontinuità. Le funzioni algebriche, sia irrazionali che razionali, non possono offrire, come notammo nel §. 43, esempi di discontinuità. Se considerassimo, non le $e^{\frac{1}{z-\delta}}$, $\mathrm{sen}\frac{1}{z-\delta}$, ecc., ma le e^z, sen z, ecc., queste presenterebbero la discontinuità, non nel punto δ, ma nel punto ∞ (*Capitolo quarto*). Una discontinuità, come un'infinito, di una funzione può sempre trasportarsi nel punto ∞, con sostituzione $z-\delta=\frac{1}{z'}$ di nuova variabile indipendente.

§. 88. Teorema. *In un punto di discontinuità, una funzione ammette come valori tutti quanti i numeri; ove però la discontinuità non sia di quelle che si possono togliere mutando il valor della funzione puramente in esso punto.*

Cominciamo a dimostrare che nel detto punto (sia sempre δ) la funzione ammette il valore ∞. Ciò è di per sè evidente se la discontinuità non sia separata dagli ∞. Quando, pel contrario, ne sia separata, si consideri la espressione

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}} \frac{w(x)\,dx}{x-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{d} \frac{w(x)dx}{x-z} ,$$

della quale si supponga che $\mathbf{D}$ non ecceda l'intorno di δ, cioè non contenga altra singularità di w fuorchè quella che esiste in δ. Ponendo, nell'integrale preso lungo d,

$$x-\delta = Re^{\Omega i} \quad , \quad dx = (x-\delta)\,i\,d\Omega \ ,$$

esso può scriversi come segue :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{d} \frac{w(x)dx}{x-z} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{w(x)}{1-\frac{z-\delta}{x-\delta}}\,d\Omega \ .$$

Il valore di questo integrale non cambia allo stringersi della circonferenza d; ma, stringendosi d e perciò avvicinandosi x a δ, il denominatore

$$1-\frac{z-\delta}{x-\delta}$$

cresce all' infinito. E pertanto, se $w(x)$ mai non cessasse di essere finita in ogni punto di d comunque questa circonferenza impiccolisse, la frazione

$$\frac{w(x)}{1-\frac{z-\delta}{x-\delta}} ,$$

e quindi l' integrale, dovrebbe essere minore di qualsia grandezza assegnata, cioè dire zero. Ma in tal caso resterebbe,

come espressione di w,

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}}\frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa-z}\ ,$$

cioè il solo integrale lungo $\mathbf{d}$, il quale rimane continuo e finito anche giungendo z nel punto δ. Quindi w dovrebbe rimanere pur'essa continua e finita per $z=\delta$, a meno che, al giungere di z in δ, w cessasse di coincidere in valore coll' integrale; il che avvenendo, w avrebbe in δ una discontinuità che si potrebbe togliere mutandone il valore in questo solo punto, cioè dandole come valore quello somministrato dall' integrale. Escludendo le discontinuità di questa sorta, resta dunque dimostrato che w deve ammettere in δ come valore l'∞.

Per riconoscere, infine, che w deve ammettere in δ anche qualsiasi altro numero A come valore, si consideri la funzione

$$W=\frac{1}{w-A}\ .$$

Questa è pure necessariamente discontinua in δ, e però vi ammette come valore l'∞; ma ciò non può darsi senza che ivi possa riuscire $w-A=0$, cioè $w=A$ (*).

§. **89.** Pigliamo ancora la formola

$$(1)\qquad w=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}}\frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{d}\frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa-z}\ .$$

Come la (1) del §. 78 per la estensione S, così questa per la estensione $\mathbf{D}-D$ può riguardarsi come una prima espressione analitica della funzione w, e, svolgendo in serie gli integrali, si otterranno altre espressioni analitiche di essa funzione.

Consideriamo lo sviluppo in serie progrediente secondo le potenze intere di $z-\delta$. Nel primo integrale, essendo mod$(\varkappa-\delta)$

(*) Nel §. 15 si è già riscontrata la verità di questo teorema a riguardo della funzione $e^{\frac{1}{z}}$ nel punto $z=0$.

$>\operatorname{mod}(z-\partial)$, possiamo porre

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x-\partial}+\frac{z-\partial}{(x-\partial)^2}+\frac{(z-\partial)^2}{(x-\partial)^3}+\dots,$$

e nel secondo, essendo $\operatorname{mod}(x-\partial)<\operatorname{mod}(z-\partial)$, possiamo porre

$$-\frac{1}{x-z}=\frac{1}{z-\partial}+\frac{x-\partial}{(z-\partial)^2}+\frac{(x-\partial)^2}{(z-\partial)^3}+\dots.$$

Ritenuto, per brevità,

$$(2)\quad \mathbf{H}_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}}\frac{w(x)dx}{(x-\partial)^{n+1}}\ ,\quad H_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{d} w(x)(x-\partial)^{n-1}dx\,,$$

avremo

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{d}}\frac{w(x)dx}{x-z}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_1(z-\partial)+\mathbf{H}_2(z-\partial)^2+\dots$$

$$(4)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_{d}\frac{w(x)dx}{x-z}=\qquad\frac{H_1}{z-\partial}+\frac{H_2}{(z-\partial)^2}\quad+\dots;$$

e quindi

$$(5)\qquad \begin{aligned} w=\mathbf{H}_0&+\mathbf{H}_1(z-\partial)+\mathbf{H}_2(z-\partial)^2+\dots\\ &+\frac{H_1}{z-\partial}+\frac{H_2}{(z-\partial)^2}+\dots.\end{aligned}$$

La espressione (1) e quindi questo sviluppo in serie non presuppongono altro se non che w sia monodroma, continua e finita entro la corona. In ∂ ed in ogni altro punto entro D o fuori di $\mathbf{D}$ la w potrebbe comportarsi comunque; e non è nè anche necessario di supporre che essa esista o sia data fuori della corona. Enuncieremo l'ottenuto risultato nel seguente

Teorema. *Una funzione monodroma, continua e finita entro una corona circolare, di cui sia ∂ il centro, può quivi rappresentarsi mediante una serie che procede secondo le potenze intere, positive e negative di $z-\partial$.*

Questo teorema è dovuto a P. A. Laurent, che lo pre-

sentava nel 1843 (*) all'Accademia delle Scienze di Parigi come estensione di quello di Cauchy (§. 78).

Riflettendo che tanto l'uno come l'altro integrale nelle formole (2) può prendersi indifferentemente lungo $\mathbf{d}$ o lungo d, poichè fra $\mathbf{d}$ e d non cade alcuna singularità dei loro differenziali, si scorge che le due formole si possono compendiare in una sola, bastando di ritenere l'una o l'altra come adoperabile anche per n negativo, e di porre nella (5) $\mathbf{H}_{-n}$ in luogo di H_n, ovvero H_{-n} in luogo di $\mathbf{H}_n$. Si avrà dunque

$$(5)' \qquad w = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathbf{H}_n (z-\vartheta)^n ,$$

dove i coefficienti sono dati dall'unica formola

$$(2)' \qquad \mathbf{H}_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{(\varkappa-\vartheta)^{n+1}} ,$$

nella quale l'integrale può prendersi lungo $\mathbf{d}$, o lungo d, o lungo qualsiasi altra linea chiusa entro la corona che formi un giro positivo intorno a ϑ.

Volendo mettere in evidenza una variabile d'integrazione reale, si potrebbe porre

$$\varkappa - \vartheta = Re^{\Omega i} ,$$

essendo R il raggio della $\mathbf{d}$, o della d, od altro intermedio. Si avrebbe

$$(2)'' \quad \mathbf{H}_n = \frac{1}{2\pi R^n} \int_0^{2\pi} \frac{w(\vartheta + Re^{\Omega i})}{e^{n\Omega i}} d\Omega = \frac{R^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(\vartheta + Re^{\Omega i}) e^{-n\Omega i} d\Omega ,$$

ed anche

$$(5)'' \qquad w = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{(z-\vartheta)^n}{R^n} \int_0^{2\pi} w(\vartheta + Re^{\Omega i}) e^{-n\Omega i} d\Omega .$$

(*) Vedi il tomo 17 dei *Comptes Rendus*, pagg. 348 e 938.

Come nel caso del cerchio (ossia del teorema di Cauchy), faremo qui osservare che

La w ammette un solo sviluppo secondo le potenze intere di $z-\partial$ entro la corona.

Infatti, supponiamo che per tutta o per una parte della corona possa sussistere l' eguaglianza

$$w = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n(z-\partial)^n \ .$$

Questa parte di corona non potrebb'essere che essa pure una corona di centro ∂; poichè una serie della forma qui supposta converge di necessità entro tutta una corona di centro ∂ e quivi soltanto (§. 53), e, se w entro la corona $\mathbf{D}-D$ coincide colla serie per qualche estensione lineare o superficiale, deve coincidere per tutto in $\mathbf{D}-D$ dove la serie rimanga convergente (§. 79). Moltiplicando la supposta eguaglianza per $\frac{dz}{(z-\partial)^{\nu+1}}$, e integrando lungo una circonferenza di centro ∂ e compresa nella corona in cui l' eguaglianza deve sussistere, si avrà

$$\int \frac{w dz}{(z-\partial)^{\nu+1}} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K_n \int (z-\partial)^{n-\nu-1} dz \ ;$$

ma, giusta il §. 75, l' integrale

$$\int (z-\partial)^{n-\nu-1} dz = \int \frac{dz}{(z-\partial)^{\nu-n+1}}$$

è nullo per tutti i valori dell' intero ν diversi da n, ed eguale a $2\pi i$ per $\nu=n$; dunque resterà

$$\int \frac{w dz}{(z-\partial)^{n+1}} = K_n 2\pi i \,,$$

la qual formola, sostituendo la lettera x alla z, non diversifica dalla (2)', cioè dice che $K_n = \mathbf{H}_n$.

§. **90**. Se si tratta di una discontinuità separata dagli infiniti, mercè le formole trovate possiamo considerare come risoluta (per quanto può richiedersi in generale, cioè senza

scendere a funzioni particolari) la questione di riconoscere come la funzione si comporti intorno a essa discontinuità. Questo modo di comportarsi viene espresso dal secondo dei due integrali componenti il secondo membro della

$$(1)\qquad w=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{d}}\frac{w(x)dx}{x-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d}\frac{w(x)dx}{x-z}\ ,$$

in cui, mentre rimane fissa la circonferenza $\mathbf{d}$, la d può restringersi quanto si vuole; laonde si può imaginare che il punto z si avvicini quanto si vuole al punto δ. Ovvero viene espresso dalla serie

$$(2)\quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{d}\frac{w(x)dx}{x-z}=\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\delta}+\frac{\mathbf{H}_{-2}}{(z-\delta)^2}+\frac{\mathbf{H}_{-3}}{(z-\delta)^3}+\dots,$$

nella quale l'integrale suddetto può svolgersi, e della quale i coefficienti rimangono invariati avvicinandosi comunque z a δ.

Di questa serie o funzione si potrà dire che *in δ diviene discontinua come la w.* E della espressione (1) si può dire che offre la w decomposta in quella sua parte (l'integrale lungo d) a cui è dovuta la singularità in δ, ed in quell'altra (l'integrale lungo $\mathbf{d}$) che rimane continua e finita in δ come in ogni altro punto di $\mathbf{D}$, e che ammette quindi in $\mathbf{D}$ uno sviluppo secondo le potenze intere e positive di $z-\delta$. Le singularità di cui w potesse essere affetta nelle altre regioni del piano, cioè fuori del cerchio $\mathbf{D}$, trovansi tutte necessariamente compendiate in questa parte (l'integrale lungo $\mathbf{d}$), la quale sarebbe continua e finita per tutto il piano, se w non avesse altra singularità che quella in δ; giacchè la parte (2) è funzione monodroma, continua e finita in qualunque punto del piano diverso da δ. Ciò è manifesto, tanto considerando la espressione di questa parte sotto forma di integrale, quanto la serie, la quale, convergendo nella corona $\mathbf{D}-D$ esteriore al cerchio D, a maggior ragione converge per moduli di $z-\delta$ ancora più grandi (§.51).

Se nel punto δ la funzione sarà veramente discontinua, la (2)

sarà veramente una serie, cioè consterà di un numero infinito di termini; imperocchè, se si chiudesse col termine $\frac{H_{-\nu}}{(z-\delta)^\nu}$, la funzione, in forza della stessa (1), non sarebbe discontinua in δ, ma infinita dell' ordine ν esimo.

E, reciprocamente, possiamo asserire che *qualunque serie, ordinata secondo le potenze intere e negative di $z-\delta$, e convergente per qualsia valor di z diverso da δ, esprime una funzione discontinua in δ, e quindi ammette in δ come valore qualunque numero.*

Per una discontinuità non separata dagli infiniti la espressione (1), come avvertimmo nel §. 87, non soddisfa alla richiesta di individuare il modo secondo cui la funzione si comporti, avvicinandosi z a δ. Essa, ovvero lo sviluppo

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} H_n (z-\delta)^n$$

non è una permanente espressione della funzione; per l'opposto, i coefficienti H dovrebbero mutare e tanto più spesso quanto più z si andasse accostando a δ, poichè lo sviluppo non riuscirebbe valido se non che in una corona viepiù sottile. Per siffatte discontinuità divengono necessarie altre formole. Nei casi, che nella *Sezione* successiva considereremo, troveremo non già una serie quale la (2), od un prodotto infinito di fattori interi e lineari rispetto a $z'=\frac{1}{z-\delta}$, ma, come anche già qualche esempio n'adducemmo, quozienti di simili serie o di simili prodotti.

§. 91. Considerando una funzione w nell' intorno di una sua discontinuità, abbiamo poc' anzi osservato, che, delle due parti ossia dei due integrali componenti la espressione

$$w=\frac{1}{2\pi i}\int_{a} \frac{w(x)dx}{x-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_{d} \frac{w(x)dx}{x-z} \quad ,$$

la prima compendia in se tutte le singularità che w può pre-

sentare fuori del cerchio **D**. Ora, questa parte potrà alla sua volta decomporsi; o, in altri termini, come si è estratta da w la parte corrispondente alla singularità in δ, così si potranno estrarre le diverse parti corrispondenti a quante altre piacerà fra le singularità della stessa funzione.

Ed invero, consideriamo una porzione qualunque S del piano che contenga quanti si siano punti tra loro separati dove w sia infinita o discontinua. Indicando con $\beta_1, .., \beta_k$ i punti dove w è infinita, con $\delta_1, \ldots, \delta_j$ quelli dov' è discontinua, e circondando tutti questi punti con altrettante linee $b_1, \ldots, b_k$, $d_1, \ldots, d_j$, nella porzione

$$S - B_1 - \ldots - B_k - D_1 - \ldots - D_j$$

di S, esteriore a tutte le anzidette linee, w sarà continua e finita senza eccezioni; quindi, pel solito teorema, potremo porre

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} ,$$

l' integrale essendo da prendersi lungo il contorno

$$s - b_1 - \ldots - b_k - d_1 - \ldots - d_j$$

della porzione medesima. Indicando le integrazioni lungo le singole parti del contorno separatamente, avremo

$$(1) \quad w = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{b_1} \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} - \ldots - \frac{1}{2\pi i}\int_{b_k} \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z}$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int_{d_1} \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} - \ldots - \frac{1}{2\pi i}\int_{d_j} \frac{w(\varkappa)d\varkappa}{\varkappa - z} .$$

Ed ecco che questa formola porge appunto w decomposta in diverse parti o funzioni corrispondenti alle diverse singularità entro S, ed in un'ultima parte o funzione la quale è continua e finita in ogni punto di S, ma compendia in se tutte le singularità che w potesse ancora presentare fuori di S, ossia, fuori di S,

riesce dovunque continua e finita con w, o nella stessa guisa infinita o discontinua (*).

In questa formola di decomposizione potremo sostituire a ciascun integrale preso lungo una linea d uno sviluppo in serie della forma (§. 89)

$$\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\delta}+\frac{\mathbf{H}_{-2}}{(z-\delta)^2}+\frac{\mathbf{H}_{-3}}{(z-\delta)^3}+\ldots,$$

valevole comunque z si approssimi a δ, del pari che a ciascun integrale preso lungo una linea b possiamo sostituire una frazione razionale della forma (§. 82)

$$\frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^{\nu}}+\frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}}+\ldots+\frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta}.$$

Se per ciascun punto β fosse data la rispettiva frazione e per ciascun punto δ la rispettiva serie, ovvero, se per ogni punto della S, dove w dovesse essere infinita o discontinua, fosse data una funzione che ivi dovesse essere infinita o discontinua come w (**), e se inoltre fossero dati i valori di w

(*) Questa decomposizione può ben'anche farsi se qualcuna delle discontinuità, per esempio quella in δ_1, non fosse separata dagli infiniti. Allora però bisognerebbe ritenere D_1 di una grandezza determinata (od almeno compresa fra limiti determinati), onde non venisse a mutarsi il numero degli infiniti compresi nella superficie

$$S-B_1-\ldots-B_h-D_1-\ldots-D_j,$$

e quindi il numero degli integrali da assumersi nella espressione (I). Pure sotto questa condizione, è ben lecito di dire che l'integrale preso lungo d_1 somministra quella parte di w che è affetta dalla discontinuità non separata dagli infiniti esistente in δ_1. La determinazione di una diversa espressione per quest'integrale ne darebbe pur sempre una corrispondente per w.

Sianvi o non sianvi discontinuità non separate dagli infiniti, dalla esposta decomposizione s'incomincia a comprendere che lo studio delle funzioni affette da qualsiasi numero di discontinuità in punti si potrà ridurre allo studio di funzioni affette ciascuna da una sola discontinuità; la quale d'altronde potrà, come notammo, essere sempre supposta nel punto $z=x$.

(**) Con questo secondo modo d'esprimerci vogliamo far intendere che nei punti β e δ, per esempio in β_1, potrebbe anche essere data, non precisamente la su indicata frazione razionale, ma una qualsiasi altra funzione φ che in β_1 divenisse infinita come la medesima; imperocchè questa potrebbe poi sempre estrarsi da φ prendendo l'integrale $-\frac{1}{2\pi i}\int_{b_1}\frac{\varphi(x)dx}{x-\beta_1}$.

nel contorno della S, la formola precedente attesta che w resterebbe affatto determinata per tutti i punti entro S. Però, come già altrove avvertimmo, questo sistema di dati è soprabbondante, cioè, i dati stessi non sono tutti indipendenti tra loro.

Anche all'integrale preso lungo s potrà sostituirsi una serie ordinata secondo potenze intere, ma positive, di una differenza $z-\gamma$ ogniqualvolta la S si ritenga un cerchio. Così ritenendola, e designando con γ il centro del cerchio, se nella formola (1) si sostituisce a ciascun integrale il rispettivo sviluppo, essa formola diviene

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} w = {} & C_0 + C_1(z-\gamma) + C_2(z-\gamma)^2 + \dots \\ & + \sum\left[\frac{C^{(0)}}{(z-\beta)^\nu} + \frac{C^{(1)}}{(z-\beta)^{\nu-1}} + \dots + \frac{C^{(\nu-1)}}{z-\beta}\right] \\ & + \sum\left[\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\partial} + \frac{\mathbf{H}_{-2}}{(z-\partial)^2} + \dots\right], \end{aligned}\right.$$

dove il $\sum$ accenna ad una somma di espressioni della stessa forma di quelle alle quali è preposto ; cioè di espressioni dall'una all'altra delle quali possono cambiare soltanto, insieme con β, il numero intero ν e i coefficienti $C^{(0)}, C^{(1)}, \dots, C^{(\nu-1)}$, e, insieme con ∂, i coefficienti $\mathbf{H}_{-1}, \mathbf{H}_{-2}, \dots$. Le formole che determinano i coefficienti mediante i valori di w sono (§§. 78, 82, 89) :

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{w(x)dx}{(x-\gamma)^{n+1}} && (n=0,\ 1,\ 2,\ \text{ecc.} \\ C^{(\nu+n)} &= \frac{1}{2\pi i}\int_b \frac{w(x)dx}{(x-\beta)^{n+1}} && (n=-\nu,\ -(\nu-1), \dots, -1 \\ \mathbf{H}_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_\delta \frac{w(x)dx}{(x-\partial)^{n+1}} && (n=-1, -2,\ \text{ecc.} \end{aligned}\right.$$

CAPITOLO QUARTO

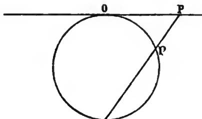
Esame dei modi secondo i quali una funzione possa comportarsi pel valore ∞ della variabile, supposto che intorno al medesimo debba essere monodroma e continua.



§. 92. Da qui innanzi giova avvezzarsi a concepire il luogo dei punti rappresentativi dei valori di z in forma sferica piuttostochè piana, o meglio, giova tenere simultaneamente entrambe le forme presenti nel pensiero (*).

Imaginando, come fu detto nel §. 14, al disotto del piano orizzontale una sfera di raggio finito che lo tocchi nel punto 0, riguarderemo come rappresentativo del numero z sulla sfera il punto p in cui la medesima (Fig. 31) è traversata dalla retta che va dal

Fig. 31.



punto *antipode* di 0 (**) al punto P rappresentativo dello stesso numero z sul piano orizzontale. Le effettive dimensioni, tutte

(*) Il nostro modo d'esprimerci deve ricordare che nessuno degli enti geometrici di cui si fa uso ha carattere di necessità nell'analisi delle funzioni. È poi chiaro, e già l'avvertimmo a pag. 126, che si preferisce la sfera ad altre superficie non meno acconcie allo stesso ufficio per la sola ragione che è la più famigliare.

(**) Per fissar meglio le idee e per brevità di linguaggio conviene considerare la sfera come fosse il globo terrestre. Riferendoci al punto 0, continuiamo a qualificare come *orizzontale* il piano z, e qualifichiamo come *antipode* il punto diametralmente opposto a 0.

le proprietà della sfera che non hanno a fare colla sua connessione, restano affatto indifferenti per quest' ufficio di rappresentazione; e, ogni qualvolta sarà d' uopo concepire con più di precisione la effettiva grandezza delle parti reale e imaginaria del numero z rappresentato da un punto p, s' imaginerà dall' antipode di O la retta che per p va a determinarne nel piano orizzontale il corrispondente P, e la posizione di P rispetto agli assi soddisferà, come al solito, alla richiesta.

Ogni qualvolta i valori di una funzione $\varphi(x,y)$ fossero presupposti distribuiti su una porzione S del piano orizzontale, si potrebbero anche imaginare trasportati ciascuno nel punto corrispondente della sfera (il valore esistente in P trasportato lungo Pp e deposto in p), e così avere invece una porzione della sfera coperta dai valori di φ; il che poi si potrebbe esprimere dicendo che φ *è data in questa porzione della sfera.* Viceversa, se φ fosse data da prima su una porzione della sfera, si potrebbe imaginarne trasportati sul piano i valori, e riguardare quindi la φ come data nella corrispondente porzione del piano.

Ma propriamente giova avvezzarsi a riguardare il piano, con sopra depostivi i valori della funzione, puramente come una delle diverse forme che può prendere la superficie sferica (o, più in generale, tanto il piano che la sfera come due delle diverse forme che può prendere la superficie z), considerata come una rete o tessuto di fili flessibili ed estendibili, di cui i nodi o crocicchi esprimano i punti, coi quali punti-valori di z debbonsi imaginare congiunti indissolnbilmente i valori della funzione. Di conformità a ciò, ciascuna lettera, che verrà assunta per significare una porzione di superficie z, od una linea in essa, od un valore di z, o di w, od ecc., si riterrà, in generale (*), significativa della stessa cosa e nella forma piana e nella forma sferica della superficie z. Potremo imaginare che questa superficie dalla forma sferica si tramuti alla forma piana, o viceversa,

(*) Fatta, cioè, eccezione per quando la chiarezza esiga lettere in qualche modo distinte tra loro, come le P e P della figura 31.

per moto simultaneo di tutti i suoi punti che percorrino le rispettive rette $\mathfrak{p}P$, o $P\mathfrak{p}$.

Sino dal §. 8 stabilimmo che il piano orizzontale s'intendesse sempre osservato dall'alto al basso, o, in altri termini, che se ne osservasse sempre la *faccia superiore*. Ora, comunque si deformi la superficie o tessuto, si ha sempre da ritenere osservata la faccia che è la deformata di cotesta superiore. Nella forma sferica questa faccia riesce la esterna, che può ancora, con ogni convenienza, qualificarsi come superiore.

Imaginando in forma sferica anzichè piana la superficie z si ha incontrastabilmente un solo punto come rappresentativo di $z=\infty$, e tutti i valori di qualsiasi funzione distribuiti sulla superficie z vengono a trovarsi nel finito, e, precisamente, tutti quelli che sarebbero stati all'infinito vengono a riunirsi nel solo punto antipode. Quindi si potrà abbracciare, come vedremo, affatto chiaramente con eguali considerazioni, e, per lo più, con eguali formole, tanto ciò che si riferisce ai valori finiti quanto ciò che al valor ∞ della variabile; la qual cosa si può ben presentire che permetterà di introdurre viepiù di armonia e semplicità nella teorica delle funzioni.

§. 93. Eccettuati nel piano i punti all'infinito e nella sfera il punto antipode, ad ogni punto nell'una superficie corrisponde un esclusivo punto nell'altra, e, secondochè due punti siano o non siano infinitamente vicini tra loro nell'una, anche i corrispondenti nell'altra sono o non sono infinitamente vicini. E però, fatta eccezione per $z=\infty$, una funzione che abbia un solo valore (finito o infinito) in un punto nell'una forma (piana o sferica) di distribuzione, conserverà distintamente quel solo valore nel corrispondente punto dell'altra, e la continuità nei valori della funzione non potrà subire alterazione alcuna nel passaggio dall'una all'altra forma. Le singularità (infiniti e discontinuità) della funzione compariranno dunque non solo nei luoghi corrispondenti ma anche colle stesse circostanze nella distribuzione sferica come nella distribuzione piana. Perciò, piacendoci anche di considerare la distribuzione sferica senza ri-

ferimento alla piana, in quanto ai modi possibili di comportarsi di una funzione in un punto potremo ritenere a dirittura stabilite precisamente le stesse distinzioni che si farebbero considerando la funzione sul piano. Ora, nella distribuzione sferica, il luogo di $z=\infty$ è nettamente, come il luogo di un valor finito di z, un solo punto, al quale si possono immediatamente applicare senza oscurità le stesse distinzioni di circostanze che per ogni altro punto abbiamo riconosciute possibili e potute trasportare dal piano alla sfera.

E pertanto, noi adottiamo da questo momento per esso punto le dette distinzioni; e, dalle medesime prendendo le mosse, vogliamo avviarci a conseguire relativamente ai vari modi di quivi comportarsi delle funzioni, le espressioni analoghe di quelle che abbiamo ottenuto per valori finiti di z.

Ma non sembrerà inopportuno di osservare prima con quali modificazioni passino a presentarsi nella distribuzione piana le varie sorta di circostanze delle quali resta così fissato di fare distinzione circa il punto ∞ nella distribuzione sferica.

Giusta il fissato, sarà da chiamarsi *continua e finita* per $z=\infty$ una funzione w allorchè, entro una calotta $\mathbf{C}_\infty$ (od altra comunque foggiata porzioncella della sfera) piccola quanto si sia ma finita e contenente il punto antipode, si trovi deposto per w in ogni punto un valor finito che non differisca sensibilmente dai valori deposti nei punti contigui. Ora, designando con $\mathbf{C}$ la calotta che insieme colla $\mathbf{C}_\infty$ costituisce tutta quanta la sfera, tutte le singularità da cui w fosse affetta si troverанno entro $\mathbf{C}$, e, se si imagina che $\mathbf{C}$ ingrandisca ossia tenda a divenire la intiera sfera, i valori di w sulla circonferenza $\mathbf{c}$ (contorno di $\mathbf{C}$) tenderanno tutti per gradi insensibili a divenire quell'unico numero A che è il valore di w nel punto antipode. E però, considerando la distribuzione nel piano, affinchè w possa dirsi continua e finita per $z=\infty$, bisogna che si possa descrivere sul piano una circonferenza finita $\mathbf{c}$ (la corrispondente della $\mathbf{c}$ sulla sfera) abbracciante tutte quante le singularità di w, e che, facendo ingrandire questa circonferenza

indefinitamente, i valori di w su di essa tendano tutti per gradi insensibili ad un medesimo limite A.

Esempi. Supponendo distribuiti sul piano i valori della funzione $e^{\frac{1}{z}}$, come circonferenza **c** può prendersi una qualunque contenente il punto 0, essendo questo il solo punto in cui la funzione presenta una singolarità (discontinuità); facendo poi ingrandire la **c** indefinitamente, i valori della funzione su di essa tendono tutti per gradi insensibili al limite 1, che è il valore della funzione per $z=\infty$. Supponendo distribuiti i valori della frazione razionale

$$A\frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\dots(z-\alpha_h)}{(z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_k)}=\frac{A}{z^{k-h}}\frac{\left(1-\frac{\alpha_1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{\alpha_h}{z}\right)}{\left(1-\frac{\beta_1}{z}\right)\dots\left(1-\frac{\beta_k}{z}\right)},$$

in cui h non superi k, come circonferenza **c** si potrà prendere una qualunque di quelle che abbracciano i punti $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$; e, facendo ingrandire **c** infinitamente, i valori su di **c** tenderanno tutti al limite 0, se sia $h<k$, od al limite A, se $h=k$.

Sarà da chiamarsi *continua ma infinita* per $z=\infty$ una funzione w allorchè per $z=\infty$ sia continua e nulla la sua reciproca. E però, nella distribuzione piana dovranno verificarsi pei valori reciproci di w le circostanze dianzi avvertite per w continua e finita (e col valor 0 per A). Del resto giova riconoscere potersi ancora dire che le stesse circostanze si verificano direttamente nei valori della funzione; ingrandendo la **c**, non si può negare che la funzione su di essa tende ancora per gradi insensibili a prendere ancora un valor eguale in tutti i punti; in questo senso, che la medesima non salta mai bruscamente da un valore *finito* ad altro valore, e che i suoi valori su **c** devono infine esser tutti ∞.

Sarà finalmente da chiamarsi *discontinua* per $z=\infty$ una funzione allorchè non cada nei due casi precedenti, cioè dire, allorchè nè essa, nè la sua reciproca, sia continua e finita per $z=\infty$. In questo caso resterà fra breve dimostrato, analo-

gamente a ciò che dimostrammo delle discontinuità per valori finiti di z, che, se la discontinuità non sia tale da potersi togliere mutando sulla sfera il valor della funzione nel solo punto antipode, in questo punto la funzione ammette come valori tutti quanti i numeri. Se la discontinuità si supponga separata dagli infiniti, si potrà ancora imaginare sul piano una circonferenza finita **c** che abbracci tutte le altre singularità di w; ma, facendo ingrandire la **c**, tanto in questa supposizione come in quella di discontinuità non separata dagli infiniti, i valori della funzione su di **c** più non tenderanno a divenire tutti eguali tra loro.

Esempio ne può essere la e^z. Questa funzione, come s'è più volte ripetuto, è discontinua in ∞, ma dappertutto altrove continua e finita. Andando nel piano all'infinito per una retta non parallela all'asse imaginario, la e^z nell'una direzione della retta riesce infinita, nell'altra nulla. Andandovi per una parallela al detto asse, la e^z riesce indeterminata per la indeterminazione dell'argomento, che in tal caso si combina con modulo e^x che più non riesce infinito o nullo, ma che rimane costante. Offrono pure discontinuità in ∞ separata dagli infiniti le funzioni $\operatorname{sen} z$, $\cos z$, $\vartheta(z)$; come anche i quozienti di simili funzioni per una funzione razionale, nel qual caso si avrebbe la discontinuità in ∞ ed un'infinito in ciascuno dei punti diversi da ∞ dove la funzione razionale fosse nulla. Esempi di discontinuità in ∞ non separate dagli infiniti si possono riconoscere nelle $\frac{1}{\cos z}$, $\operatorname{tang} z$, $\frac{1}{\vartheta(z)}$, $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{cn} z$, $\operatorname{dn} z$. Mentre per queste funzioni sulla sfera gli infiniti si succedono a intervalli tanto più piccoli quanto più sono prossimi all'antipode, sul piano invece si succedono a intervalli costanti, cioè, per le prime due si succedono, com'è notissimo, in linea retta coll'intervallo costante π, e per le altre quattro si succedono nelle intersezioni di due sistemi di rette parallele ed equidistanti.

§. 94. Passiamo a determinare le espressioni analitiche dei modi di comportarsi delle funzioni intorno al valore ∞ di z. Perciò consideriamo sulla sfera una zona che circondi il

punto ∞ e non contenga nè infiniti, nè discontinuità di w, zona che sia la differenza $\mathbf{C}_\infty - C_\infty$ di due calotte aventi il centro in ∞, o, ciò ch' è lo stesso, la differenza $C - \mathbf{C}$ delle altre due calotte, che hanno il contorno in comune rispettivamente con C_∞ e $\mathbf{C}_\infty$ e il centro in 0 (*). Non essendovi, per supposto, entro la zona (o corona circolare nel piano) $C - \mathbf{C}$ alcuna singularità di w, sussisterà la solita formola

$$w = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{w(x)\,dx}{x - z},$$

in cui l'integrale, essendo da prendersi lungo l'intero contorno in direzione positiva, dovrà prendersi lungo la circonferenza c nel senso positivo degli angoli e lungo la $\mathbf{c}$ nel senso negativo. Indicando le integrazioni separatamente, avremo la

$$(1) \qquad w = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{c}} \frac{w(x)dx}{x - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{w(x)dx}{x - z},$$

che, secondo fu già detto nei §§. 82 e 87, potrà ritenersi come una prima espressione analitica del modo di comportarsi di w per $z = \infty$, quando essa continui a valere senza mutamento anche se, restando fissa la circonferenza $\mathbf{c}$, la c si vada stringendo sulla sfera sempre più intorno a ∞ (ossia sul piano sempre più ingrandendo), sì che z possa accostarsi sempre più a ∞ senza uscire dalla zona.

Ora, consideriamo separatamente i tre casi di w continua e finita, continua e infinita, discontinua in ∞, notando per ciascuno lo sviluppo in serie secondo le potenze intere di z che scaturisce dalla (1).

§. 95. Nel caso di w continua e finita in ∞, prendendo la calotta $\mathbf{C}_\infty$ in modo che entro di essa, giusta la definizione data nel §. 93, la funzione sia dappertutto continua e finita,

(*) Come si vede, rappresentiamo sistematicamente per mezzo di una medesima lettera, con e senza il segno ∞ al piede, due calotte che insieme costituiscono la totalità della sfera.

la calotta minore C_∞ non conterrà alcuna singolarità di w e quindi potrà impiccolirsi indefinitamente senza che il secondo integrale nella

$$(1)\qquad w=-\frac{1}{2\pi i}\int_e \frac{w(x)\,dx}{x-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w(x)\,dx}{x-z}$$

cambi di valore. Ponendo in questo integrale

$$x=Re^{\Omega i}\quad,\quad \frac{dx}{x}=i\,d\Omega\quad,$$

dove R significa il raggio della c sul piano, si avrà

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w(x)\,dx}{x-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{w(x)}{1-\frac{z}{x}}\,d\Omega.$$

Imaginando che R divenga infinitamente grande, il rapporto $\frac{z}{x}$ diverrà infinitamente piccolo ossia nullo, quindi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{w(x)\,dx}{x-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\infty)\,d\Omega=w(\infty)\ ;$$

vale a dire, il secondo integrale nella (1) non varia con z ed è il valor di w per $z=\infty$.

Nel primo integrale è sempre $\mathrm{mod}\,x<\mathrm{mod}\,z$, quindi, mercè lo sviluppo

$$\frac{1}{x-z}=-\frac{1}{z}-\frac{x}{z^2}-\frac{x^2}{z^3}-\ldots,$$

ponendo per brevità

$$(2)\qquad \mathbf{K}_n=\frac{1}{2\pi i}\int_e w(x)\,x^{n-1}dx\ ,$$

si avrà per esso integrale lo sviluppo seguente

$$(3)\qquad -\frac{1}{2\pi i}\int_e \frac{w(x)\,dx}{x-z}=\frac{\mathbf{K}_1}{z}+\frac{\mathbf{K}_2}{z^2}+\frac{\mathbf{K}_3}{z^3}+\ldots\ .$$

E però lo sviluppo secondo le potenze intere di z scaturiente

dalla (1), per w continua e finita in ∞, è:

(4) $$w = \mathbf{K}_0 + \frac{\mathbf{K}_1}{z} + \frac{\mathbf{K}_2}{z^2} + \ldots .$$

Abbiamo qui rappresentato con $\mathbf{K}_0$ il valore di w in ∞, che è anche effettivamente dato dal secondo membro della (2) per $n=0$.

Se questo valore sarà lo 0 e se insieme con $\mathbf{K}_0$ saranno nulli altri $\mu-1$ coefficienti tutti di seguito, si avrà

$$w = \frac{1}{z_\mu}\left(\mathbf{K}_\mu + \frac{\mathbf{K}_{\mu+1}}{z} + \frac{\mathbf{K}_{\mu+2}}{z^2} + \ldots\right),$$

ossia

(5) $$w = \left(\frac{1}{z}\right)^\mu W,$$

essendo W funzione continua, finita e diversa da zero per $z=\infty$, siccome esprimibile colla precedente serie fra le parentesi. Analogamente al già convenuto nel §. 80, sussistendo la (5), diremo che w ha nel punto $z=\infty$ uno zero *dell' ordine μ esimo*. Nel §. 80 figurava come infinitamente piccolo di prim'ordine la differenza $z-\alpha$, in questo § figura $\frac{1}{z}$. Anche in ∞ l'ordine dello zero di una funzione continua non potrebbe essere infinito; poichè dovrebbero essere nulli tutti i coefficienti $\mathbf{K}$, cioè la funzione essere nulla per tutta la calotta $\mathbf{C}_\infty$ e dovunque altrove si potesse giungere da $\mathbf{C}_\infty$ per liste di larghezza finita esenti da discontinuità.

§. 96. Nel caso di w continua e infinita in ∞, sarà quivi continua e finita la funzione reciproca $\frac{1}{w}$. E però, per questa sussisterà, giusta il § precedente, la formola

$$\frac{1}{w} = \left(\frac{1}{z}\right)^\nu \frac{1}{W},$$

essendo $\frac{1}{W}$, e quindi anche W, funzione continua, finita e di-

versa da zero per $z=\infty$, e ν numero intero positivo. Dunque si avrà

$$(1) \qquad w=\left(\frac{1}{z}\right)^{-\nu} W=z^{\nu} W\,.$$

Analogamente al dichiarato nel §. 83, qui diremo che w ha nel punto $z=\infty$ un'infinito *dell'ordine ν esimo.* Anche in ∞ l'ordine dell'infinito non potrebbe essere infinitamente grande senza che w fosse costantemente infinita.

Ponendo nella (1) lo sviluppo in serie secondo le potenze intere negative di z, di cui W è suscettibile, otterremo lo sviluppo che corrisponde a w, del quale i primi ν termini conterranno potenze positive di z e daranno la parte di w che diviene infinita in ∞, la quale è dunque una funzione razionale intera.

Questa parte, colla giunta d' una costante, trovasi espressa dal secondo integrale della formola

$$(2) \qquad w=-\frac{1}{2\pi i}\int_{e}\frac{w(x)dx}{x-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{w(x)dx}{x-z}\,.$$

Infatti, essendo pel detto integrale $\mathrm{mod}\, x > \mathrm{mod}\, z$, si ha

$$\frac{1}{x-z}=\frac{1}{x}+\frac{z}{x^2}+\frac{z^2}{x^3}+\ldots,$$

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{e}\frac{w(x)dx}{x-z}=K_0+K_1z+K_2z^2+\ldots,$$

dove

$$(4) \qquad K_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{e}\frac{w(x)dx}{x^{n+1}}\,.$$

Ora, siccome il primo integrale della formola (2) si converte in serie contenente soltanto potenze negative di z (§ precedente), e lo sviluppo secondo potenze intere di z entro la zona o corona in considerazione è possibile in una sola maniera (§. 89), così la funzione razionale intera esprimente la parte

di w che diviene infinita in ∞ non può essere che

(5) $$K_1 z + K_2 z^2 + \dots + K_\nu z^\nu \quad .$$

I coefficienti $K_{\nu+1}$, $K_{\nu+2}$, ecc. non possono essere diversi da zero.

§. 97. Consideriamo finalmente il caso di w discontinua in ∞. Lo sviluppo dei due integrali della formola

(1) $$w = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{w(x)dx}{x-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{c} \frac{w(x)dx}{x-z}$$

secondo le potenze intere di z ha sempre luogo, cioè si ha, giusta le formole (3) dei due paragrafi precedenti,

(2) $$w = \frac{\mathbf{K}_1}{z} + \frac{\mathbf{K}_2}{z^2} + \dots$$
$$+ K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \dots \quad .$$

Considerandosi in questo Capitolo, come nel precedente, soltanto discontinuità in punti tra loro separati, se inoltre si lascia per adesso, ancora come ivi, in disparte il caso di discontinuità non separata dagli infiniti, si potrà imaginare la zona $\mathbf{C}_\infty - C_\infty$ pur sempre sensibile ma bastantemente piccola affinchè la calotta interna C_∞ non contenga altra singularità di w fuorchè la discontinuità in ∞, ed allora si avrà nella formola (2), come nella (1), una espressione valida per qualunque avvicinamento di z a ∞, cioè dire una vera espressione del modo di comportarsi di w intorno a $z = \infty$.

La parte di w a cui è dovuta la discontinuità in ∞ è data dal secondo integrale, ossia, tralasciando K_0, è data dalla serie

$$K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + \dots ,$$

la quale, sostituendo $\frac{1}{z-\delta}$ a z, assumerebbe la forma della serie

$$\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\delta} + \frac{\mathbf{H}_{-2}}{(z-\delta)^2} + \frac{\mathbf{H}_{-3}}{(z-\delta)^3} + \dots$$

del §. 90, ed ammette qual valore per $z = \infty$, come già sappiamo di questa per $z = \delta$, qualunque numero.

Le due formole esprimenti i valori dei coefficienti $\mathbf{K}$ e K possono ridursi a una sola, poichè i rispettivi integrali possono prendersi entrambi lungo $\mathbf{c}$ o lungo c o lungo qualunque altra linea chiusa entro la corona $C-\mathbf{C}$ che compia un giro intorno a 0. E però, gli sviluppi dati per w in questo e nei due paragrafi precedenti si possono compendiare nelle due formole

$$w=\sum\frac{\mathbf{K}_n}{z^n}\quad,\qquad \mathbf{K}_n=\frac{1}{2\pi i}\int w(x)x^{n-1}dx\,,$$

oppure nelle

$$w=\sum K_n z^n\quad,\qquad K_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{w(x)\,dx}{x^{n+1}}\,,$$

cioè nel teorema di Laurent, applicabile, come è ben evidente, a questa affatto egualmente che ad ogni altra corona sul piano. La corona $\mathbf{D}-D$ considerata nel §. 89 coincide con questa supponendo $\delta=0$, $\mathbf{d}=c$, $d=\mathbf{c}$, nelle quali supposizioni le formole (5)' e (2)' di quel paragrafo sono le qui esposte.

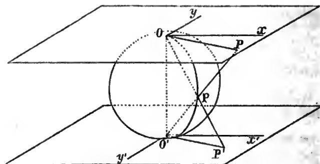
§. 98. I risultati ottenuti nei paragrafi precedenti, ed in generale tutto quanto può importare di stabilire riguardo al valor ∞ di z, si possono anche e semplicissimamente conseguire col sussidio di nuova variabile indipendente che rimanga finita mentre z diviene infinita, come in particolare la $z'=\frac{1}{z}$.

Applicando il teorema di Laurent ad una corona circondante il punto 0 nel piano della z', e nella espressione da esso fornita per w restituendo $\frac{1}{z}$ in luogo di z', si avrebbe la espressione di w in serie ordinata secondo le potenze intere di z da considerarsi intorno a $z=\infty$. Ma l' aver stabilito i risultati precedenti tanto per valori finiti che pel valore ∞ di z direttamente coll' esclusiva considerazione di questa variabile indipendente rende forse ancora più facile il tener abbracciate simultaneamente nel pensiero tutte quante le proprietà generali, che possono importare, delle funzioni in riguardo ai valori, sieno finiti o no, della variabile.

Però, quantunque non sia necessaria la introduzione della z', e meno ancora la considerazione di un luogo geometrico per la medesima, tuttavia non tralascieremo di indicare una particolare corrispondenza attuabile tra i luoghi geometrici (piano e sfera) imaginati per z ed un piano assumibile come luogo rappresentativo per z'; corrispondenza semplicissima e che talvolta potrà tornare opportuna (*).

La sfera z abbia per diametro l' unità, e si imagini nell' antipode di O, designato con O', il piano tangente la sfera, del quale s' intenda osservata la faccia non rivolta alla sfera, faccia che sarebbe pure detta *superiore* da un osservatore ritto in O' (**). Seguitando a qualificare come *orizzontale* il piano z, qualificheremo come *antipode* il piano tangente in O'. Si projettino su questo piano i punti della sfera mediante rette partenti tutte da O. Il punto P, già projezione sulla sfera del punto P del piano orizzontale, si projetterà in P' (Fig. 32)

Fig. 32.



sul piano antipode. Al punto P spettano le coordinate x, y relative agli assi reale e imaginario già supposti nel piano orizzontale. Ora, riferiscansi i punti del piano antipode mediante le coordinate x', y' alle due rette passanti per O' parallelamente agli assi del piano orizzontale. E propriamente, si prenda come

(*) È data ed impiegata dal sig. Neumann nell'opera di cui riferimmo a pagg. 142-143.

(**) Vedi la seconda nota alla pag. 444.

direzione positiva delle x' la positiva delle x, e come direzione positiva delle y' la negativa delle y; si che l'osservatore in O' guardando sul piano (antipode) secondo la direzione positiva delle x' abbia la direzione positiva delle y', come di regola, alla sinistra. Ciò fissato, fra le coordinate dei punti P e P' avranno luogo le due relazioni reali compendiate nella complessa

$$x'+y'i=\frac{1}{x+yi} .$$

Infatti, esprimendo, come al solito, r, r' le lunghezze e ω, ω' gli angoli delle rette $OP, O'P'$ cogli assi delle x, x', si avrà

$$x+yi=re^{\omega i} , \quad x'+y'=r'e^{\omega' i} .$$

Ora, si rifletta che, per essere la direzione positiva delle y' contraria alla positiva delle y, il senso positivo degli angoli ω' è il negativo degli ω; laonde

(1) $$\omega'=-\omega .$$

Inoltre, per la somiglianza dei triangoli $P'O'O$, $O'OP$, si ha la proporzione

$$\frac{P'O'}{O'O}=\frac{O'O}{OP} ,$$

ciòè

(2) $$r'=\frac{1}{r} .$$

Dunque

(3) $$x'+y'i=\frac{1}{r}e^{-\omega i}=\frac{1}{x+yi} .$$

Questo risultato dimostra che, prendendo come piano della nuova variabile $z'=\frac{1}{z}$ il piano antipode e fissandovi gli assi come si è fatto, il punto che nel piano z' corrisponde ad un dato punto P nel piano z si avrà tirando la PO' e pel punto d'incontro di questa colla sfera tirando la OP'.

Se, considerando la w come funzione della variabile z', si vorrà imaginarne i valori distribuiti sul piano z', sarà da ima-

ginare trasportato nel punto P' il valore che sul piano z era deposto in P e sulla sfera in P.

I valori di w distribuiti sulla sfera in una calotta col centro in O' (cioè in $z=\infty$) verranno sul piano antipode a trovarsi distribuiti in un cerchio col centro in O' (cioè in $z'=0$). Le circostanze che si possono dare pei valori di w intorno al punto $z=\infty$ sulla sfera non sono dunque altro che le circostanze che possono darsi intorno al punto $z'=0$ sul piano z', e quindi non altro che le circostanze stesse riscontrabili per altri valori finiti di z' ossia per valori finiti di z. Questo semplice confronto delle due distribuzioni sulla sfera e sul piano antipode assicura quindi, per esempio, non poter avvenire che, camminando sulla sfera verso il punto $z=\infty$, si incontri uno stesso valore A per w a intervalli che divengano infinitesimi insieme colla distanza da esso punto, a meno che w sia discontinua in $z=\infty$ oppure abbia costantemente il valore A in $z=\infty$ e dovunque si possa giungere a partire da questo punto per liste di larghezza finita esenti da discontinuità.

Anche il piano antipode con sopra distribuitivi i valori di w si può considerare come uno degli stati pei quali può passare la superficie o tessuto z, di cui già qualificammo due stati particolari il piano z e la sfera z. Si potrà imaginare che il tessuto dallo stato sferico venga ridotto allo stato di piano antipode col far percorrere simultaneamente a tutti i suoi punti le rispettive rette $\mathrm{P}P'$.

§. **99.** Tenendo la superficie z in stato o forma sferica, riesce intuitivamente più chiaro, che non tenendola in forma piana, che una linea, la quale possa considerarsi come l'intero contorno di una parte di essa superficie, può anche considerarsi come l'intero contorno di tutta la restante parte. Abbiasi sulla sfera la linea chiusa c, che, per esempio, corrisponda sul piano z a circonferenza c di centro 0; chi si sia riconosce senz'altro nettamente ch'essa linea divide la sfera in due calotte C e C_∞,

di entrambe le quali forma essa il contorno (*). È però da osservarsi se una persona percorre la linea c, l'una calotta rimane a sinistra, l'altra a destra della persona. Quindi, volendo tener ferma anche per porzioni di sfera contenenti il punto ∞ la data definizione di *direzione positiva del contorno*, è chiaro che, mentre, come contorno della calotta C di centro 0 (ossia del cerchio C nel piano), la linea c s'intende diretta positivamente nel senso positivo degli angoli, come contorno della calotta C_∞ di centro ∞ (ossia della regione infinita di piano esteriore al cerchio C), essa dovrà intendersi positivamente diretta nel senso negativo degli angoli (**).

Come si sono conservati i concetti di *ordine d'uno zero* e *d'un infinito* pel punto ∞, così vogliasi conservare anche questo di *direzione positiva del contorno*, non che gli altri che parimenti s'è trovato opportuno di stabilire per punti-valori finiti di z. Un *giro positivo attorno a* ∞ equivarrà (nel senso) ad un giro negativo attorno a 0, od attorno a qualsiasi altro punto-valore finito di z. L'*intorno* del punto ∞ per una funzione w s'intenderà essere la massima fra le calotte che, avendo il centro in ∞, non racchiudono alcuna singularità di w, tranne quella che fosse per esistere nel punto stesso ∞. Esistendo una singularità in ∞ non separata da ogni altra, l'intorno, come nel caso di qualunque altro punto della superficie z, non esisterebbe, ossia non sarebbe altro che il punto ∞ stesso. L'intorno di ∞ sul

(*) Si può comprendere sin d'ora come possa riuscire anche molto utile per talune dimostrazioni questo doppio modo di concepire un contorno c. L'integrale da prendersi lungo c di un differenziale che per tutto c sia monodromo rimarrà lo stesso (oppure non farà che cambiare di segno se si cambierà la direzione dell'integrazione), sia che si concepisca come preso lungo il contorno dell'una parte C, che come preso lungo il contorno dell'altra parte C_∞ di superficie z. Ora, se nell'un concepimento esso si riconoscerà eguale ad una quantità, e nell'altro eguale ad altra quantità, si concluderà che queste due quantità sono eguali (oppure contrarie).

(**) Alla regione infinita di piano z esteriore al cerchio di centro 0 e raggio r corrisponde nel piano antipode il cerchio di centro $0'$ e raggio $r' = \frac{1}{r}$. E, mentre il punto P (Fig. 32) girerà nel senso negativo degli angoli ω, il punto P' (che si muove insieme col piano $P0\,0'P'$) girerà nel senso positivo degli angoli ω'.

piano z è la regione esteriore al minimo fra i cerchi che, avendo il centro in 0, abbracciano tutte quante le singularità di w, eccetto quella che avesse luogo per $z=\infty$.

Non s' incontra alcuna difficoltà nell' estendere, colle debite modificazioni, al valore ∞ di z le varie sorte di formole stabilite nei passati Capitoli della corrente *Sezione* e nel Capitolo quarto della precedente e non ancora considerate in questo. A conferma di ciò possono bastare i seguenti brevi cenni.

Comunque sia la funzione w in ∞, purchè continua, si può porre, giusta i §§. 95 e 96,

(1) $$w=\left(\frac{1}{z}\right)^q W \quad ,$$

essendo W funzione continua, non infinita, nè nulla in ∞, e q numero intero; il quale propriamente sarà positivo, nullo, oppure negativo, secondochè il valore di w in ∞ sarà zero, non zero e non infinito, oppure infinito. Ora, da questa formola, come dalla (1) del §. 84, deducesi colle stesse considerazioni ivi esposte (nelle quali devesi prendere $\frac{1}{z}$ ossia z' invece di $z-\gamma$) la formola

(2) $$q=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\infty} dl\, w=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_\infty}\frac{dw}{w} \quad ,$$

in cui c_∞ significa una linea sulla sfera racchiudente il punto ∞, ma nessun' altro punto dove w possa essere nulla o infinita o discontinua; linea da percorrersi girando positivamente intorno a ∞, cioè dire girando nel senso negativo degli angoli sul piano.

La formola del §. 86, stabilita nel supposto che la porzione S di superficie z fosse tutta nel finito sul piano, sussiste anche abbracciando con S il punto ∞, ammesso, ben' inteso, che w sia ancora dappertutto continua in S. A persuadersene, basta imaginare circondato il punto ∞ (sia o non sia in esso infinita o nulla la w) mediante una linea c_∞, e riflettere che il teorema ivi invocato dal §. 72 si applica tuttora alla S.

Però il teorema fondamentale, che, integrando, wdz lungo l'intiero contorno di una porzione S di superficie z, entro cui w sia funzione monodroma, continua e finita, si abbia per risultato lo zero, non può estendersi ad nna S comprendente il punto ∞, se non presupponendo che in ∞ sia non soltanto continua e finita la w, ma finita anche la wz^2 (*). Possiamo tosto riconoscere questa verità riferendo l'integrale alla variabile z'. Essendo

$$z=\frac{1}{z'}\ ,\quad dz=-\frac{dz'}{z'^2}\ ,$$

si ha

$$w(z)\,dz=-\frac{w\left(\frac{1}{z'}\right)}{z'^2}dz'\ .$$

Se S significa porzione di piano z abbracciante il punto ∞, ossia porzione di sfera z abbracciante l'antipode, ma non il pnnto 0 (**), la porzione S' di piano antipode corrispondente ad S sarà finita e conterrà il pnnto $0'$. Facendo percorrere alla z il contorno di S, la z' percorrerà il contorno di S' e si avrà

$$\int_s w\,dz=-\int_{s'}\frac{w}{z'^2}dz'\ .$$

Per qualunque valore di z la w suppongasi continua e finita, lo dovrà essere anche la $\frac{w}{z'^2}$, eccetto però per $z=\infty$, essendochè per questo valore riesca $z'=0$. Per poter dunque asserire che l'integrale di $\frac{w}{z'^2}dz'$ preso lnngo il contorno di S' sarà nullo (e quindi nullo quello di wdz preso lungo il contorno di S)

(*) Laonde w, intorno a $z=\infty$, dovrebbe potersi esprimere con una serie della forma $\frac{K_2}{z^2}+\frac{K_3}{z^3}+$ ecc., ossia dovrebbe essere nulla almeno del second'ordine in ∞.

(**) Dal qual caso può farsi dipendere qualsiasi altro, imaginando, all'uopo, la estensione da considerarsi divisa in due parti, una contenente 0, l'altra ∞.

bisogna presupporre non soltanto la w continua e finita dappertutto in S, ma in ∞ finita anche la wz^2.

Dal qui esposto si può inferire, ciò che del resto si riscontrerà effettivamente in seguito, che, non soltanto per questa, ma anche per molte altre proposizioni riferentisi a $\int wdz$, il passaggio dal caso di z finita a quello di z infinita si otterrà col semplice surrogare la wz^2 alla w.

La decomposizione di w in parti fatta nel §. 91 per mezzo degli integrali presi intorno alle singularità, non che la sostituzione delle serie agli integrali, si opera affatto similmente se anche S contenga il punto ∞. Siavi o non siavi in questo punto una singularità per w, circondandolo con una linea c_∞, e circondando con linee $b_1, \ldots, b_k, d_1, \ldots, d_j$ le singularità che si trovassero ancora in S dopo averne levata la calotta C_∞, si potrà porre

$$w = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{w(x)dx}{x - z} ,$$

essendo z un punto qualunque della superficie $S - C_\infty - B_1 - \ldots - B_k - D_1 - \ldots - D_j$, di estensione finita anche nello stato piano, e l'integrale essendo da prendersi lungo il contorno di questa superficie, e quindi decomponibile nella somma degli integrali da prendersi lungo le singole parti $s, -c_\infty, -b_1$, ecc. del contorno. Se S fosse tutta la sfera, la parte s di questo contorno sarebbe nulla, ed avremmo ancora precisamente la formola (1) del §. 91, postovi $-c_\infty$ in luogo di s. Se nel piano la c_∞ sarà, come è più semplice di supporre, circonferenza di centro 0, la quantità γ della formola (2) del citato paragrafo sarà 0, cioè l'integrale lungo c_∞ sarà tradotto in serie ordinata secondo le potenze intere e positive di z; la qual serie, del resto, dovrà ridursi al solo termine costante, o ad un numero finito di termini, se w sarà continua e finita, o continua e infinita in ∞.

CAPITOLO QUINTO

Come si comportino, intorno ai singoli valori della variabile, la derivata e l' integrale di una funzione in confronto della funzione stessa.



§. **100.** Per avere una prima espressione della derivata di w nell' intorno di un punto, potremmo derivare rispetto a z i due integrali la cui differenza esprime, come al solito, w in una corona circondante il punto; derivazione che può farsi, come già nel §. 77, sotto il segno integrale. Ma, per il confronto che vogliamo qui fare tra la derivata e la funzione, deriveremo a dirittura i soliti sviluppi in serie di essi integrali, cioè deriveremo la formola ((5)' del §. 89, la di cui lettera δ ci piace di qui scambiare con γ).

$$(1) \qquad w = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathbf{H}_n (z-\gamma)^n$$

ovvero la

$$(1)' \qquad w = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{\mathbf{K}_n}{z^n} \ ,$$

secondochè il punto rappresenti un valor finito γ ovvero il valore ∞ di z. Avremo

$$(2) \qquad \frac{dw}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n\mathbf{H}_n (z-\gamma)^{n-1}$$

ovvero

$$(2)' \qquad \frac{dw}{dz} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} -\frac{n\mathbf{K}_n}{z^{n+1}} \ .$$

Della corona o zona circondante il punto γ ovvero ∞, pur tenendo invariabile la maggior circonferenza, si potrà imaginare

che la minore vada stringendosi quanto si vorrà intorno al detto punto; a meno che w avesse quivi una discontinuità non isolata da ogni altra singularità.

Distinguiamo ora i vari casi. Supponiamo w continua e finita (in γ ovvero in ∞). Allora i coefficienti $\mathbf{H}$ ovvero $\mathbf{K}$ d'indice negativo saranno nulli, e per la derivata avremo la espressione

$$\frac{dw}{dz}=\mathbf{H}_1+2\mathbf{H}_2(z-\gamma)+3\mathbf{H}_3(z-\gamma)^2+\ldots$$

ovvero

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{\mathbf{K}_1}{z^2}-\frac{2\mathbf{K}_2}{z^3}-\frac{3\mathbf{K}_3}{z^4}-\ldots$$

Quest' ultima espressione mostra che, siccome già sapevamo per un valor finito, così anche pel valore ∞ di z, la derivata è monodroma, continua e finita, se tale sia la funzione. Ma pel valor ∞ di z evvi anche da notare che la derivata riesce non soltanto finita, ma nulla almeno del secondo ordine.

Se w sarà nulla dell'ordine μ, cioè se saranno $\mathbf{H}_0=\mathbf{H}_1=\ldots=\mathbf{H}_{\mu-1}=0$ ovvero $\mathbf{K}_0=\mathbf{K}_1=\ldots=\mathbf{K}_{\mu-1}=0$, si avrà

$$\frac{dw}{dz}=\mu\,\mathbf{H}_\mu(z-\gamma)^{\mu-1}+(\mu+1)\,\mathbf{H}_{\mu+1}(z-\gamma)^{\mu}+\ldots$$

ovvero

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{\mu\,\mathbf{K}_\mu}{z^{\mu+1}}-\frac{(\mu+1)\mathbf{K}_{\mu+1}}{z^{\mu+2}}-\ldots\,.$$

Dunque, passando dalla funzione alla derivata, l' ordine di uno zero diminuisce ovvero cresce di un' unità, secondochè lo zero ha luogo per valor finito ovvero infinito della variabile.

Supponiamo adesso w continua ma infinita dell'ordine ν. Allora i coefficienti $\mathbf{H}$ ovvero $\mathbf{K}$ che dovranno essere nulli saranno quelli degli indici $-(\nu+1)$, $-(\nu+2)$, $-(\nu+3)$, ecc.; e si avrà

$$\frac{dw}{dz}=-\frac{\nu\mathbf{H}_{-\nu}}{(z-\gamma)^{\nu+1}}-\frac{(\nu-1)\mathbf{H}_{-(\nu-1)}}{(z-\gamma)^{\nu}}-\ldots$$

ovvero

$$\frac{dw}{dz}=\nu\mathbf{K}_{-\nu}z^{\nu-1}+(\nu-1)\mathbf{K}_{-(\nu-1)}z^{\nu-2}+\ldots .$$

Dunque, passando dalla funzione alla derivata, l'ordine di un' infinito cresce ovvero diminuisce di un' unità, secondochè l'infinito ha luogo per valor finito ovvero infinito della variabile.

Supponendo finalmente che w sia discontinua, il numero dei coefficienti d' indice negativo che non saranno nulli dovrà essere infinito nella (1) ovvero (1)', e quindi anche nella (2) ovvero (2)'. *Dunque la derivata sarà pure discontinua in γ ovvero in ∞, essendo del resto nell' intorno monodroma al pari di w.*

§. **101**. Come nel § precedente, osserveremo che, per avere una prima espressione dell' integrale di wdz nell' intorno di un punto, potremmo integrare i due integrali, la cui differenza esprime, come al solito, w in una corona circondante il punto; integrazione che potrebbe farsi sotto i segni integrali, trattandosi, già s' intende, di cammino tutto contenuto nella corona. Ma anche qui, per il confronto che vogliamo fare tra l' integrale di wdz e w, integreremo a dirittura gli sviluppi in serie, cioè la formola (1) ovvero (1)' del § precedente.

Sia z_0 il punto (fisso) di partenza e z il punto (variabile) finale a cui supponiamo che si giunga coll'integrazione. Questa potrà dare risultamenti diversi a seconda del cammino che si seguirà da z_0 a z. Però, essendo w, non che ogni termine $\mathbf{H}_n(z-\gamma)^n$ ovvero $\frac{\mathbf{K}_n}{z^n}$, funzione monodroma, continua e finita entro la corona, tutti i cammini che si possono ridurre l' uno all' altro, mediante le solite deformazioni infinitesime senza uscire dalla corona, daranno uno stesso risultamento. Quindi possiamo limitarci a considerare un cammino affatto particolare l, conducente da z_0 a z, e tutti quelli che si hanno aggiungendo ad l un numero intero di giri intorno al centro γ ovvero ∞ della corona, come fu distesamente spiegato nel §. 72. Indicando rispettiva-

mente con

$$\int_l wdz \quad , \quad \int_{z_0}^{z_0} wdz$$

i risultati della integrazione di wdz da z_0 a z lungo l, e da z_0 a z_0 facendo un giro intorno a γ ovvero ∞, e indicando con m un intero arbitrario (suscettibile di valori tanto positivi che negativi), potremo rappresentare tutti i possibili risultati dell' integrazione di wdz da z_0 a z entro la corona mediante la formola

$$(1) \qquad \int_{z_0}^{z} wdz = m \int_{z_0}^{z_0} wdz + \int_l wdz \quad .$$

Troviamo ora separatamente le espressioni dei due integrali componenti questo secondo membro.

Per la espressione in serie dell' integrale

$$\int_l wdz \quad ,$$

integrando lungo l ciascun termine del secondo membro della (1) ovvero (1)' del § precedente, si ha

$$(2) \qquad \int_l wdz = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathbf{H}_n \int_l (z-\gamma)^n dz$$

ovvero

$$(2)' \qquad \int_l wdz = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \mathbf{K}_n \int_l \frac{dz}{z^n} \quad .$$

Ora, per n diverso da -1, è manifestamente

$$\int_l (z-\gamma)^n dz = \frac{(z-\gamma)^{n+1}}{n+1} - \frac{(z_0-\gamma)^{n+1}}{n+1}$$

e, per n diverso da 1,

$$\int_l \frac{dz}{z^n} = -\frac{1}{(n-1)z^{n-1}} + \frac{1}{(n-1)z_0^{n-1}} \quad .$$

Quanto all' integrale

$$\int_l \frac{dz}{z-\gamma} \quad \text{ovvero} \quad \int_l \frac{dz}{z} ,$$

ponendovi

$$z-\gamma = Re^{\Omega i} \quad \text{ovvero} \quad z = z - 0 = Re^{\Omega i} ,$$

lo si muta in

$$\int_l \frac{dR}{R} + i \int_l d\Omega \quad ,$$

e si riconosce, come nel §. 73 (considerando il movimento della retta R, cioè della $\overline{\gamma z}$ ovvero $\overline{0z}$), che esso ha per valore la differenza

$$lR - lR_0 + i(\Omega - \Omega_0) \ ,$$

in cui lR_0 e Ω_0, lR e Ω significano i valori del logaritmo principale di R e quelli di Ω al principio e al termine del cammino l. Questa differenza potremo anche esprimerla con

$$l(z-\gamma) - l(z_0-\gamma) \quad \text{ovvero} \quad lz - lz_0 \quad ,$$

intendendo presi i coefficienti di i in modo che ne risulti, come prima, l' angolo descritto durante la integrazione. Sostituendo tutti gli indicati valori nel secondo membro della (2) ovvero (2)', avremo

$$\begin{aligned}
&+ \ldots\ldots\ldots \\
&+ \frac{\mathbf{H}_1}{2}\left[(z-\gamma)^2 - (z_0-\gamma)^2\right] \\
&+ \frac{\mathbf{H}_0}{1}\left[(z-\gamma) - (z_0-\gamma)\right] \\
(3) \qquad \int_l w\,dz = \ &\mathbf{H}_{-1}\left[l(z-\gamma) - l(z_0-\gamma)\right] \\
&+ \frac{\mathbf{H}_{-2}}{-1}\left[\frac{1}{z-\gamma} - \frac{1}{z_0-\gamma}\right] \\
&+ \frac{\mathbf{H}_{-3}}{-2}\left[\frac{1}{(z-\gamma)^2} - \frac{1}{(z_0-\gamma)^2}\right] \\
&+ \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

ovvero

$$
\begin{aligned}
&+ \dots\dots \\
&+ \frac{K_3}{-2}\left[\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z_0^2}\right] \\
&+ \frac{K_2}{-1}\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z_0}\right] \\
(3)' \quad \int_l wdz = \quad & K_1\left[lz-lz_0\right] \\
&+ \frac{K_0}{1}\left[z-z_0\right] \\
&+ \frac{K_{-1}}{2}\left[z^2-z_0^2\right] \\
&+ \dots\dots
\end{aligned}
$$

Per ottenere il valore dell' integrale

$$\int_{z_0}^{z_0} wdz$$

basta supporre che la l nella (2) ovvero (2)' divenga il cammino chiuso che principia e termina in z_0 e ricordare il §. 75, o, ciò ch'è lo stesso, basta introdurre cotesta supposizione a dirittura nella (3) ovvero (3)'. Riuscendo in tal caso $z=z_0$, tutti i termini algebrici si distruggeranno e si avrà

$$\int_{z_0}^{z_0} wdz = H_{-1}[l(z_0-\gamma) - l(z_0-\gamma)]$$

ovvero

$$\int_{z_0}^{z_0} wdz = K_1[lz_0 - lz_0] \quad .$$

Stabilendo ora, per togliere ogni indeterminatezza, che il giro da z_0 a z_0 debba farsi positivamente intorno a γ ovvero negati-

vamente intorno a ∞, la retta R dovrà in entrambi i casi rotare nel senso positivo degli angoli, e, siccome deve compiere una intiera rotazione, si avrà

$$(4) \qquad \int_{z_0}^{z_0} w dz = \mathbf{H}_{-1} . 2\pi i$$

ovvero

$$(4)' \qquad \int_{z_0}^{z_0} w dz = \mathbf{K}_1 . 2\pi i \quad .$$

Sostituendo i valori (3) e (4) ovvero (3)' e (4)' nella (1) si avrà la voluta espressione generale dell' integrale

$$\int_{z_0}^{z} w dz ,$$

nella corona piana o zona sferica. Per siffatta espressione, del resto, può ritenersi già senz' altro la (3) ovvero (3)', qualora si riguardi il cammino l come qualunque, o, ciò ch' è dire lo stesso, qualora il termine logaritmico lo s'intenda in tutta la generalità, cioè involgente un multiplo arbitrario di $2\pi i$. Ritenendo, come al solito, che, se havvi singularità per w in γ ovvero in ∞, essa però sia separata da ogni altra, si può stringere quanto piace la minor circonferenza della zona attorno a γ ovvero ∞, ond'è che la formola ottenuta può dirsi una vera espressione del modo di comportarsi dell'integrale nell'intorno di γ ovvero ∞.

Questo modo di comportarsi sarà monodromo se sarà nullo il coefficiente $\mathbf{H}_{-1}$ ovvero $\mathbf{K}_1$. Possiamo quindi enunciare il

Teorema. *Affinchè l' integrale* $\int w dz$ *sia monodromo, al pari di* w, *nell' intorno di un punto* γ *ovvero* ∞, *è necessario e sufficiente che nello sviluppo di* w *ovvero* wz^2, *in serie ordinata secondo le potenze intere di* $z-\gamma$ *ovvero* $\frac{1}{z}$, *manchi il termine che in quel punto diverrebbe infinitamente grande del prim' ordine* (*).

(*) Se w ovvero wz^2 dovesse supporsi continua e finita in γ ovvero ∞, la proprietà

In un coll' essere monodromo, l' integrale sarà continuo e finito, oppure continuo e infinito, oppure discontinuo, secondo che nella (3) ovvero (3)' non esisteranno termini contenenti potenze negative di $z-\gamma$ ovvero $\frac{1}{z}$, oppure ne esisterà un numero finito, oppure un numero infinito. Ciò è quanto dire che, *in un coll' essere monodromo, l' integrale sarà continuo e finito, o continuo e infinito, o discontinuo insieme con w ovvero wz^2 nel punto γ ovvero ∞.*

In generale, quando l' integrale divenga infinito in γ ovvero in ∞, vuolsi ricordare che, mentre ivi w si comporta come la espressione algebrica

$$\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\gamma}+\frac{\mathbf{H}_{-2}}{(z-\gamma)^2}+\frac{\mathbf{H}_{-3}}{(z-\gamma)^3}+\ldots+\frac{\mathbf{H}_{-\nu}}{(z-\gamma)^\nu}$$

ovvero

$$\mathbf{K}_{-1}z+\mathbf{K}_{-2}z^2+\ \ldots\ +\mathbf{K}_{-\nu}z^\nu\ ,$$

esso integrale (come risulta tralasciando nella (3) ovvero (3)' i termini costanti e quelli che restano finiti) *si comporta come la espressione algebrico-logaritmica*

$$\mathbf{H}_{-1}l(z-\gamma)-\frac{\mathbf{H}_{-2}}{z-\gamma}-\frac{\mathbf{H}_{-3}}{2(z-\gamma)^2}-\ldots-\frac{\mathbf{H}_{-\nu}}{(\nu-1)(z-\gamma)^{\nu-1}}$$

ovvero

$$\mathbf{K}_1 lz\ +\mathbf{K}_0 z\ +\frac{\mathbf{K}_{-1}}{2}z^2+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{\mathbf{K}_{-\nu}}{\nu+1}z^{\nu+1}.$$

È soltanto nel caso della monodromia, che si potrà dire che l' integrale diviene in γ ovvero ∞ algebricamente infinito. E in

$\int_{z_0}^{z_0} wdz=0$ non sarebbe altro ancora che il solito teorema fondamentale, di cui accennammo la estensione al valor ∞ di z sul finire del §. 99. Ma, perchè questa proprietà sussista, si vede dalla (4) ovvero (4)' non essere necessario che w ovvero wz^2 rimanga finita, ma soltanto che lo sviluppo in serie non contenga il termine $\frac{\mathbf{H}_{-1}}{z-\gamma}$ ovvero $\mathbf{K}_1 z$.

Nel *Calcolo dei residui* la trovata condizione della monodromia esprimerebbesi dicendo che dev' esser nullo il residuo di w relativo a γ ovvero ∞.

tal caso l'ordine dell'infinito, passando dalla funzione all'integrale, diminuisce ovvero cresce di un'unità, secondochè l'infinito corrisponde a valor finito ovvero infinito di z.

Le due formole precedenti, che si possono anche qualificare siccome la parte della funzione integrale a cui è dovuta la singularità (in γ ovvero in ∞), si compendiano facilmente in una sola (*). Indicando con ζ l'infinitamente piccolo di prim'ordine $z-\gamma$ ovvero $\frac{1}{z}$, e con $A, B, C, \ldots$ delle costanti, e riflettendo essere $\mathbf{K}_1 lz = -\mathbf{K}_1 l\frac{1}{z}$, si ottiene infatti che entrambe le formole compajano come somme finite della forma

$$(5) \qquad A l\zeta + B\zeta^{-1} + C\zeta^{-2} + \ldots .$$

FINE DEL VOLUME PRIMO

(*) Avremmo potuto riunire i due casi sin da principio in questo Capitolo e nei passati; ma col distinguerli crediamo d'aver guadagnato in facilità ed evidenza.





